



A AMSTERDAM Chez PIERRE MORTIER. 1733.

LES ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE;

QUI COMPRENNENT LES ELEMENS d'Euclide; les plus belles Propositions d'Archimede touchant le Cercle, la Sphere, le Cylindre & le Cône; avec une idée de l'Analyse, & une Introduction aux Sections Coniques.

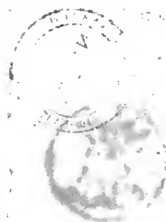
Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Sixiéme Edition, revue & augmentée.





A AMSTERDAM,
Chez PIERRE MORTIER.
M. DCC. XXXIV.





PREFACE,

Où l'on fait voir ce que c'eſt que la Géometrie, quelle eſt ſon utilité, & quels ſont ſes Principes.

DANS les Elémens de Mathématique imprimés pour la troiſieme fois en 1704, nous avons conſideré les proprietés de la Grandeur en général. L'étendue qui eſt ſenſible dans les corps, en eſt une eſpece. Dans tout corps, ou dans ce qui eſt étendu, on diſtingue trois dimenſions, la longueur, la largeur, & la profondeur. Ce ſont les proprietés de l'étendue & par conſéquent des corps, que nous allons examiner, non pas celles des corps ſenſibles, la dureté, la couleur, le froid, le chaud; mais celles de l'étendue intelligible, ou du corps entant qu'il eſt conçu comme un Etre qui a trois dimenſions, qui eſt long, large, & profond. Quand il n'y auroit aucun Etre tel dans le monde, tout ce que nous allons dire des proprietés du corps ainſi conſideré, ne laiſſeroit pas d'être éternellement & immuablement vrai; car ce n'eſt pas une matiere ſujette au changement, qui eſt ici notre objet. Il ne s'agit d'aucun corps particulier; mais parce que c'eſt pour meſurer la Terre qu'on s'eſt appliqué à étudier les proprietés du corps en général, on donne à ces Elémens le nom de Géometrie, qui s'étend

bien plus loin qu'à la mesure de la Terre. Comme elle découvre les proprietés de l'étendue, elle comprend la connoissance de presque toutes les choses qui sont dans le Monde, qui est l'assemblage de tous les corps; car ce qui convient au corps intelligible, ou au corps en général, convient à tout ce qui est réellement étendu. Les Astres sont des corps, les Cieux sont étendus. Leur distance de la Terre, leur grandeur, leur diametre se mesurent par des lignes, qui peuvent aussi marquer leurs mouvemens; ainsi l'Astronomie ou la science des Astres, les operations & les raisonnemens des Astronomes, sont fondez sur la Géometrie.

La Gnomonique est un Art qui trace sur un plan la route du Soleil, en marquant le chemin de l'ombre que fait le sommet du stile du Cadran qui représente la Terre, autour de laquelle le Soleil tourne; ainsi les opérations de cet Art sont fondées sur la Géometrie. La Marine, dans la plus grande partie de ses pratiques, est une dépendance de l'Astronomie. Il est évident que l'Architecture, les Fortifications, les Méchaniques, ont pour objet des choses étendues; par conséquent elles sont renfermées dans la science du corps en général. Il n'y a gueres autre chose dans les corps considerez dans leur état naturel, que ce qui est dans le corps mathématique, c'est-à-dire, seulement consideré comme étendu. On a sujet de croire que toutes les qualitez sensibles du corps

corps naturel ne ſont point en lui, mais dans l'ame qui les ſent; on peut donc dire que toute cette partie de la Philoſophie, qu'on nomme la Phyſique, n'eſt qu'une Géometrie. Je parle de cette partie où il ne s'agit point de l'eſprit, ni de ſon union avec le corps, mais ſimplement du corps. On ne peut donc être Phyſicien ſans être Géometre. Dans l'Optique, la Dioptrique, la Catoptrique, la Perſpective, tout ſe démontre par lignes; & généralement dans une bonne Phyſique on rend raiſon de tous les effets des corps en montrant que ce ſont des ſuites de leur figure, de leurs mouvemens, qui s'expriment par des lignes. En un mot, la Géometrie eſt comme les élémens de toutes les ſciences, qui ont pour objet les corps.

Néanmoins ce n'eſt pas ſur cela ſeul que je fonde l'eſtime qu'on doit faire de la Géometrie, mais ſur ce qu'elle eſt propre pour former l'eſprit, & le rendre exact, étendu & pénétrant. Nous avons vu dans la Préface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'accoutumer à conſiderer les choſes abſtraites, c'eſt-à-dire, ſéparées de toute matiere ſenſible; & que pour cette raiſon l'étude de ce Traité étoit avantageuſe, parce que les véritez qu'on y propoſoit étant expliquées ſans figures, leurs idées ſe préſentoient à l'eſprit ſans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui eſt corps;

ceux donc qui ne font usage que de leur imagination, ne peuvent appercevoir les choses spirituelles. Ils ne croyent pas même qu'il y en ait, parce qu'ils n'en trouvent point d'images dans leur imagination: comme lorsque dans les tenebres on cherche quelque corps avec les mains, si l'on ne rencontre rien qui résiste, on croit qu'il n'y en a aucun.

Il est donc important de s'accoutumer à voir sans images, & de se convaincre qu'il y a des véritez qui se conçoivent autrement que les corps. Mais il ne faut pas pour cela négliger de cultiver son imagination. On en peut même tirer un grand secours pour concevoir les choses spirituelles; & c'est une nécessité dans l'état où nous nous trouvons, d'y avoir recours. En quittant Dieu nous sommes tombez dans les corps: il faut donc nous y appuyer pour nous relever, comme nous le faisons quand nous sommes tombez par terre. L'ame voit la vérité qui lui est présente, & à laquelle elle est attentive: mais les corps l'attirent vers eux par les impressions qu'ils font sur elle, & lui font perdre de vue cette vérité, à moins qu'elle n'y soit comme attachée par les corps mêmes, qui sont la cause de ses distractions; ce qui arrive lorsque cette vérité est exprimée par des signes sensibles, qui tournent l'ame vers eux, & l'obligent de voir la vérité qu'ils marquent. Peu de personnes se peuvent passer de ce secours. Il y a d'habiles gens qui ne voyent rien dans un sujet lorsqu'ils

qu'ils le considerent par les seuls yeux de l'esprit, & qui après l'avoir exprimé sur le papier, apperçoivent tout ce qu'il faut voir pour en juger.

Ainsi après avoir lu le Traité de la Grandeur en général, & s'y être accoutumé à concevoir les choses sans images, ce qui est très important pour la Religion; il est utile d'apprendre ici comme il faut se servir de son imagination, qui n'est point dangereuse à ceux qui savent distinguer ce que l'esprit pur conçoit, d'avec ce qu'elle présente. Elle est une source de plusieurs erreurs, lorsqu'on ne consulte point la raison; mais aussi il faut avouer que ceux qui veulent trop s'élever sans s'appuyer sur ce qui est sensible, sont fort sujets à l'illusion, & qu'ils s'égarent souvent dans de vaines pensées. L'ame qui est plus occupée des corps que des choses spirituelles, n'apperçoit qu'à demi celles-ci. Si elle n'est donc réservée dans ses jugemens pour ne prononcer que sur ce qu'elle voit; si ce qu'elle considere n'est extrêmement simple, comme sont les choses qui ont fait le sujet du Traité de la Grandeur, elle se trompe facilement. Dans les autres Sciences abstraites, l'erreur y est toujours à craindre; on est obligé de se contenter des vraisemblances: ce qui n'arrive pas dans celles qui sont aidées de l'imagination, comme la Géometrie, dont les Théorêmes frappent l'esprit trop vivement pour s'y tromper, quand on les considere avec un peu d'attention. La véri-

té ou la fausseté y paroissent trop évidemment, pour être confonaues.

On trouve dans la Géometrie des modeles qui ne peuvent tromper, des démonstrations claires & convaincantes. Elle apprend la méthode de conduire l'esprit de véritez en véritez. On y voit des exemples, comme dans la recherche des Sciences il faut se servir des premieres connoissances qu'on a acquises, ou de celles qui nous sont naturelles, pour aller plus loin. L'art & le secret des Sciences ne consistent qu'à déduire des premieres véritez que Dieu a mises dans notre ame, les conséquencec dont elles renferment les principes, c'est-à-dire, à ménager la Science naturelle; ce que les Géometres font admirablement, comme nous l'allons faire voir, en découvrant en même tems les principes & les fondemens de la Géometrie, ce qui servira de disposition pour la comprendre avec plus de facilité.

Dans la Géometrie, comme dans toutes les autres Sciences, on ne se trompe point, quand on raisonne sur des idées claires, qu'on ne dit que ce que l'on conçoit. La Géometrie a cela de particulier, que les principes sur lesquels elle est fondée sont en très petit nombre. Elle ne parle que de choses simples, faciles à connoitre, ou de celles qui en sont des suites nécessaires & évidentes. Les idées de la ligne droite, & des cercles, dont elle s'occupe d'abord, sont claires. Les véritez, sur lesquelles elle

s'ap-

s'appuye, sont inconteſtables, & connues de tout le monde; & c'eſt à elles qu'on peut réduire tout ce qu'elle entreprend de démontrer. On ne peut ignorer ni conteſter, qu'une choſe ne peut pas être, & n'être pas dans un même tems; *d'où il s'enſuit, que puiſque le tout & ſes parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe, il faut que* le tout ſoit égal à ſes parties: *car autrement la même choſe ſeroit & ne ſeroit pas. De ce principe on tire encore cette conſéquence, qu'il faut que* deux grandeurs égales à une même grandeur, ſoient égales entre elles; *car ces trois grandeurs ne ſont qu'une même choſe; ainſi ſi elles étoient inégales entre elles, elles ſeroient & ne ſeroient pas. On peut de même rapporter à ce principe les quatre Axiomes ſuivans.*

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, les touts ſeront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les reſtes ſeront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, les touts ſeront inégaux.

Ces Axiomes ſont fondez ſur ce que les touts égaux ont des parties égales, & les inégaux des parties inégales. Or ſi les touts égaux n'avoient pas des parties égales, ils ſeroient & ne ſeroient pas.

De ces véritez ſuivent une infinité d'autres

 vé-

veritez ; par exemple, que les moitiez de deux touts égaux sont égales, *ou que* les doubles de ces touts sont égaux, *&* les tiers de deux touts égaux sont égaux, *ou que* les triples de deux touts égaux sont égaux ; *ainsi des quarts & des quadruples, & d'une infinité de semblables Propositions.*

Les véritez suivantes, bien qu'elles soient, pour ainsi dire, grossieres, sont des sources très fécondes de plusieurs démonstrations, savoir, que le tout est plus grand qu'une de ses parties : *& que* ce qui est contenu, *ou* renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur. *Que* deux grandeurs qui conviennent en tout, lorsqu'on les pose l'une sur l'autre, sont égales.

*C'est sur ce principe, qu'*une chose ne peut pas être, & n'être pas, *que les Géometres se fondent, lorsqu'ils tirent leur preuve de la construction, ou de la supposition qu'ils ont faite, c'est-à dire, qu'on ne peut pas contester leur conclusion, à moins qu'on ne dise qu'une chose peut être, & n'être pas en même tems, ce qui est absurde. Car leur conclusion est une suite si naturelle de ce qui a été fait, que si cette conclusion ne suit pas, il faut que la chose n'ait pas été faite comme on l'a supposé.*

Tous ces principes ne sont dans le fond que celui-ci, qu'on ne se trompe point, quand on raisonne sur des idées claires, qu'on ne dit que ce que l'on conçoit. *Mais la difficulté, c'est de dis-*

distinguer les idées qui sont veritablement claires, & les choses qui se peuvent concevoir. Comme je l'ai dit, celles qui sont le sujet de la Géometrie sont simples, aisées à connoitre, à distinguer. L'idée du corps est claire : les Géometres ne considerent que ses dimensions, dont la notion est très claire. Personne ne peut ignorer les proprietez générales de l'étendue, non plus que ces principes généraux, dont nous venons de parler. On sait ce que c'est que d'être étendu, long, large & profond ; & c'est le seul usage que les Géometres ont fait de ces connoissances, qui leur a fait découvrir une infinité de véritez cachées au reste des hommes ; preuve évidente, que si on usoit bien des premieres connoissances naturelles, & si on alloit par ordre comme ils font, on feroit d'admirables progrès dans les Sciences. On ne les acquiert que par ce moyen ; c'est pourquoi les premieres études n'étant que pour apprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Géometrie.

Mais pour cela il faut qu'elle soit traitée avec méthode, ce que ne fait pas Euclide. Il n'a pensé qu'à ranger ses Propositions, de maniere qu'elles se servissent de preuves les unes aux autres ; en quoi il a réussi. La vérité se trouve dans ses Elémens ; mais au reste il y a tant de confusion, que bien loin de donner à l'esprit l'idée & le goût du véritable ordre, ils ne peuvent au contraire que l'accoutumer au desor-

dre & à la confusion, comme s'en plaint Monsieur Nicole dans la Préface des Elémens de Géometrie de Monsieur Arnaud, qui furent imprimez pour la premiere fois en 1667.

C'est dans ces Elémens de Monsieur Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel, qui n'est point dans ceux d'Euclide. S'il eût traité des Solides, je n'aurois peut-être jamais pensé à travailler à de nouveaux Elémens. Ce fut pour y suppléer que j'en eus la premiere pensée. Je traite en ceux-ci ce qui regarde les Solides, d'une maniere beaucoup plus étendue que ne fait Euclide & ses Commentateurs; car j'y comprends ce qu'Archimede a démontré de plus considerable touchant les Cylindres, les Cônes & la Sphere.

J'ai pris à tâche d'expliquer tout Euclide, à la réserve du septieme, du huitieme & du neuvieme Livre, qui ne traitent que des nombres, ce qui n'apartient pas à la Géometrie. Je n'ai pas aussi voulu grossir mon Ouvrage de toutes les Propositions de son dixieme Livre, parce qu'on ne le cite gueres; & que ce qui y est d'usage se peut expliquer en peu de pages, comme je croi l'avoir fait. Ses Elémens sont comme la clef commune à presque tous les Livres de Mathématiques. On les cite par-tout; ce qui oblige de les savoir. Nous n'avons de lui que les Propositions qui sont dans ses Elémens: les démonstrations sont de Proclus. Ainsi pour donner un Euclide, il n'est question que de rap-

rapporter ses Propositions. L'expérience fera voir que le seul ordre que je leur donne, en facilite la démonstration; c'est pourquoi j'espere qu'on apprendra ici Euclide avec beaucoup plus de facilité qu'en aucun de ses Commentateurs; outre que mon Ouvrage est plus court, quoiqu'il contienne plus de choses.

Je le distribue selon les trois dimensions qui se distinguent dans le corps, savoir, la longueur, la largeur, & la profondeur ou solidité. Dans le premier Livre je considere les proprietez de la premiere dimension, me bornant encore à la longueur, qui est une ligne, ou droite ou circulaire. Ces lignes étant plus simples & plus faciles à connoitre, l'ordre demande qu'on commence par elles, & qu'on réserve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui sont plus composées, & qui ont des proprietez plus cachées. Dans le second Livre je traite de la seconde dimension, & je n'y parle pour la même raison que des largeurs ou surfaces qui sont les plus simples; c'est-à-dire, des surfaces droites qu'on nomme plans, qui sont bornées par des lignes droites ou par des cercles. Dans le troisieme Livre j'applique aux lignes les proprietez de la grandeur en général, qui leur conviennent. Ainsi cette nouvelle Edition ne suppose point absolument qu'on ait vu les Elémens des Mathématiques, ou Traité de la Grandeur en général. Par conséquent on pourra commencer l'étude des Mathématiques par ces

ces Elémens de Géometrie, si on espere y trouver plus de facilité. Dans le quatrieme Livre j'explique ce qui regarde les raisons & les propotions des lignes droites, des cercles, & des surfaces droites, ou des plans. Dans le cinquieme je traite de la solidité.

Comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit exact & pénétrant, à quoi la Méthode, que les Géometres appellent Analyse, est particulierement utile; je tâche dans le sixieme Livre de donner une idée de cette Méthode, appliquant à la Géometrie ce que j'en ai dit ailleurs par rapport à la Grandeur en général. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premieres connoissances de la Géometrie, & en même tems je propose des essais de cette Méthode sur quelques Problêmes.

Je n'ai parlé dans ces Elémens que de la ligne droite & circulaire, & des solides compris sous des surfaces planes ou sphériques, qui se font par le mouvement de ces deux lignes Mais j'ajoute à la fin une Introduction aux Sections Coniques, qui servira de premiers Elémens pour les lignes courbes, & les solides qu'elles forment.

Ce n'est donc point en retranchant de ces Elémens des choses nécessaires, que je les ai rendu courts; mais en prenant des voyes abregées, par où je mene tout d'un coup à la vérité. Je tire mes démonstrations de la notion de la chose même dont je parle; de sorte qu'avec un peu d'attention à cette notion, on découvre soi-même la dé-

démonstration. Il n'y a dans mes Elémens qu'un petit nombre de Théorêmes fondamentaux. Quand on les aura compris, les autres qui n'en sont que des Corollaires, c'est-à-dire, des conséquences évidentes, ne seront plus difficiles. Enfin ce qui donnera de la facilité pour entendre & retenir ce qu'on va lire, c'est que toutes les matieres sont rangées sous des chefs qui les lient, & en font un corps de doctrine.

J'ai travaillé de nouveau cet Ouvrage, ayant reconnu qu'il pouvoit servir à former l'esprit & le cœur. C'est Dieu qu'il faut regarder en toutes choses, & l'étude de la Géometrie y doit porter. On y trouve de grands sujets de penser à lui. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raisons & leurs proportions, se remarque ensuite dans les Ouvrages de la Nature; ce qui donne lieu d'admirer celui qui en est l'Ouvrier. Il n'y a point de petit corps qui ne soit capable de toutes les figures de Mathématique, selon qu'on concevra que sa matiere sera disposée. Ces figures ont toutes leurs proprietez. L'esprit peut par conséquent découvrir en chaque corps un nombre infini de véritez surprenantes, lorsqu'il le considere avec ordre; c'est-à-dire, s'il fait les considerations que peut faire un habile Géometre, & s'il applique à ce corps tout ce que la Géometrie enseigne.

Combien d'admirables véritez verrions-nous

donc

donc en Dieu, si nous l'étudiions autant que nous faisons les corps? Nous n'y voyons presque rien, parce que notre esprit ne peut s'appliquer autant de tems à lui, qu'il fait à la matiere. Mais combien de choses les Saints découvrent-ils en sa Divine Essence, qui est la cause de la fécondité de la matiere? Et si la connoissance des véritez que la Géometrie nous enseigne donne tant de contentement, quel est le plaisir des Bienheureux qui voyent des véritez d'autant plus excellentes, que Dieu surpasse infiniment les Corps?

Ainsi, outre le plaisir spirituel que donne la Géometrie, pour insinuer du mépris pour les voluptez, & par-là nous rendre plus propres pour la Morale de l'Evangile, qui est ennemie de ces voluptez : outre qu'elle dispose l'esprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui sont élevées au-dessus de la matiere, dont elle le rend capable ; elle nous fait encore connoître quelle est la vaste étendue de la Science que possedent ceux qui voyent Dieu, & de quel plaisir ils jouissent en découvrant tant de véritez dans la Divine Essence. Par conséquent la Géometrie pourroit donner un plus ardent desir de posseder Dieu, que de devenir Géometre, si on l'étudioit avec l'esprit que je le prie lui-même de donner à ceux qui se serviront de mon Ouvrage.

PAS-

PASSAGE DE PLATON,

du Livre septieme de sa République, touchant l'excellence & l'utilité de la Géometrie.

VOus voyez donc, cher Ami, que les Mathématiques sont nécessaires, puisqu'elles nous obligent *par cette exactitude, dont elles donnent l'habitude*, de faire usage de notre esprit. C'est certainement ce qu'elles font ; & c'est une chose remarquable, que tous les hommes étant capables par leur nature de raisonner, & de comprendre toutes les Sciences, ceux qui ont moins d'ouverture, s'ils étudient cette Science, quand elle leur seroit inutile pour toute autre chose, ils en retirent cet avantage, que leur esprit devient plus ouvert; car il n'y a point d'étude qui l'exerce plus, & qui la rende *autant capable d'attention*; aussi c'est à cette étude qu'il faut appliquer ceux en qui on remarque un esprit qui mérite d'être cultivé.

PASSAGE DE PLUTARQUE,

du huitieme Livre des Questions sympo-siaques, Question seconde.

PLATON loue la Géometrie, parce qu'elle détache des ſens, auxquels nous nous donnons entierement, & qu'elle nous tourne vers ce qui eſt intelligible & éternel, dont la connoiſſance eſt la fin de la Philoſophie, comme la vue claire des Myſteres eſt la fin de ceux qui s'y font initier. La volupté & la douleur ſont comme un clou, qui attache ſi fortement l'Ame au Corps, qu'elle en devient dépendante: les choſes corporelles lui deviennent ainſi plus claires, parce qu'elle en eſt plus touchée. Elle ne juge donc point des choſes par la lumiere de la raiſon, mais par les impreſſions qu'elle reçoit de ſon corps. La force de la douleur ou des plaiſirs, fait qu'elle ne devient ſenſible qu'à ces perpetuels & divers changemens des choſes corporelles qui agiſſent ſur elle; ainſi elle s'aveugle, & perd cette lumiere infiniment plus précieuſe que les yeux du corps, étant ſeule capable de nous faire appercevoir la Nature Divine. La Géometrie eſt comme un miroir poli, où l'on voit des veſtiges & des images des choſes intellectuelles, vers leſquelles elle tourne l'eſprit, après l'avoir comme purifié & dégagé de la ſervitude des ſens.

TA-

TABLE

DES LIVRES, SECTIONS, CHAPITRES, ET PRINCIPALES MATIERES.

LIVRE PREMIER.

De la premiere espece d'Etendue, qui est la Longueur.

Des Lignes droites & circulaires.

LI-

LIVRE SECOND.

De la seconde espece d'Etendue, qui est la Largeur.

Des Surfaces planes.

LI-

LIVRE TROISIEME.

Les Proprietez qui conviennent à toue Grandeur, appliquées aux lignes, plans, solides; & démontrées.

LIVRE QUATRIEME.

Des Raisons & Proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtez & circuit, que de leurs surfaces.

SECT.

LIVRE CINQUIEME.

De la troisieme espece d'Etendue, c'est-à-dire, des Solides; comment les Solides se forment, & se mesurent.

LIVRE SIXIEME.

De la Méthode.

INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

FIN DE LA TABLE.

EX-

EXPLICATION DES TERMES
& des Notes dont on se doit servir.

Axiome.

ON appelle *Axiome* une vérité claire & constante, qu'on connoit sans étude, dont tout le monde convient.

Demande ou *Proposition évidente.*

C'est une Proposition qui n'est pas connue avant qu'on l'étudie, mais qui le devient aussitôt qu'on y fait attention; qu'on a ainsi droit de demander qu'on reçoive comme incontestable. J'appelle plus volontiers *Proposition évidente*, ce qu'on nomme ordinairement *Demande*; parce que ce mot n'est gueres François dans le sens que lui donnent les Géometres.

Définition.

C'est une Proposition qui détermine l'idée d'un mot; ou qui donne une notion distincte de la chose qu'on veut que ce mot signifie.

Théorême.

On nomme ainsi une Proposition dont il faut démontrer la vérité.

Problême.

C'est aussi une Proposition qu'il faut démontrer; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque chose; & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit proposé de faire.

Lemme.

C'est une Proposition qui n'est au lieu où elle est, que pour servir de preuve à d'autres qui suivent.

Corollaire.

C'eſt une Propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre précédente.

NOTES.

Cette marque + ſignifie *plus*. $A + B$, c'eſt *A plus B*.

Celle-ci − ſignifie *moins*. $A - B$, c'eſt *A moins B*.

∞ C'eſt la marque de l'*égalité*. $C \infty D$ ſignifie que *C* eſt *égal* à *D*. Mais l'on ſe ſert aujourd'hui plus communément de cette marque =. $C = D$, ſignifie que *C* eſt *égal* à *D*.

$>$ *Plus grand.*

$<$ *Plus petit.*

× *Par*. C'eſt le ſigne de la multiplication. Comme $A \times D$ ſignifie *A* multiplié par *D*.

ſup. Supra ou *ci-deſſus*.

l. Livre.

n. Nombre. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui ſervent à trouver les Propoſitions qu'on allégue. l. 2. n. 6. c'eſt à dire: *Livre ſecond*, *nombre ſix*. Si l'endroit où l'on renvoye eſt du même livre, on cite le nombre précédent qui eſt à la marge avec cette note *ſup*. Ainſi *ſup. n.* 5. c'eſt-à-dire: *Ci-deſſus nombre cinquieme.*

Prop Propoſition. Lorſque la Propoſition qu'on fait ſe trouve dans Euclide, on marque l'endroit de cette maniere: *Eucl. I. prop.* 7. C'eſt-à-dire: *Euclide livre premier*, *propoſition ſeptieme.*

Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir. Afin qu'on s'accoutume à l'uſage de ces notes, je m'en ſers ici en propoſant les véritez ſuivantes.

AXIO-

AXIOMES OU VERITEZ claires & connues.

Premier Axiome.

Le tout est plus grand que sa partie.

Ainsi, si A & B sont les parties d'une ligne que je nomme X ou de toute autre grandeur, ce tout X est plus grand que A & que B pris séparément. $X > A$, & $X > B$.

Second Axiome.

Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Si A & B sont toutes les parties de X, il est évident que $A+B$, c'est-à-dire A avec B, est égal à X : Ce qui s'exprime ainsi $A+B=X$.

Troisieme Axiome.

Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.

Supposé que $A=Z$ & $B=Z$; c'est-à-dire que A soit égal à Z & que B soit aussi égal à Z, alors A & B sont deux grandeurs égales. On exprime ainsi ce raisonnement : Si $A=Z$ & $B=Z$; ou ce qui est la même chose, si $A=Z=B$: donc $A=B$. Je me servirai souvent de cette expression : qu'on y fasse donc attention. On peut joindre à cet Axiome celui-ci qui n'est pas moins évident : Si A est égal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, fera plus grande ou plus petite que A.

Quatrieme Axiome.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales, les sommes sont égales.

Si $A=B$, ajoutant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux $A+X=B+X$.

Cinquieme Axiome.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si $A=B$, donc $A-X=B-X$; c'est-à-dire, que si A & B sont deux grandeurs égales, A moins X est égal à B moins X.

Sixieme Axiome.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, elles resteront inégales, l'une plus grande si elle étoit plus grande, ou plus petite si elle étoit plus petite.

Si X & Z sont des grandeurs inégales, & que A & B soient des grandeurs égales, $X+A$ & $Z+B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce qu'ils étoient auparavant.

Septieme Axiome.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux, l'un plus grand si la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit si la grandeur étoit plus petite.

C'est-à-dire, que si X & Z sont des grandeurs inégales, $X-A$ & $Z-A$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitieme Axiome.

Une grandeur qui a le signe $+$, étant jointe avec elle-même ou avec son égale qui a le signe $-$, est égale à rien, ou à zero.

C'est-à-dire, $+A-A=0$.

Neuvieme Axiome.

Les choses qui sont moitié ou tiers &c. d'une même grandeur ou de grandeurs égales, sont égales; mais elles sont inégales, si les grandeurs entieres sont inégales; plus grandes, si les grandeurs entieres sont plus grandes; plus petites, si les grandeurs entieres sont plus petites.

Dixie-

Dixieme Axiome.

Les grandeurs qui conviennent étant posées les unes sur les autres, sont égales.

Si deux lignes posées l'une sur l'autre conviennent, elles sont égales.

On pourroit proposer plusieurs autres semblables Axiomes; c'est-à-dire plusieurs autres véritez qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dispute point.

AVERTISSEMENT.

On pouroit joindre à ces Axiomes, c'est-à-dire, à ces véritez connues & incontestables, cette Proposition, Qu'une chose est vraye par sa construction, quand elle est faite exactement selon une règle dont on étoit convenu. Ainsi après qu'on est convenu de ce qu'il faut faire pour couper une ligne en deux parties égales, & qu'on a

A B C

ainsi coupé AC *au point* B, *alors par la construction* AB *&* BC *sont les moitiez de cette ligne.*

C'est aussi une vérité, qu'une Proposition est incontestable lorsqu'on ne la peut nier sans dire une chose absurde, c'est-à-dire qui est manifestement fausse.

On réduit toutes les démonstrations dont on se sert, à ce petit nombre de véritez qu'on vient de proposer, & aux notions claires & distinctes des choses dont on doit parler. C'est dans la notion ou l'idée d'une chose qu'on découvre ses proprietez, & qu'on apperçoit ce qu'elle est véritablement; ainsi toute l'habileté d'un Auteur ne consiste que dans l'art, avec lequel il fait faire attention à l'idée de la chose qui fait le sujet de son Livre; ne proposant d'abord que ce qu'il y a de

de plus simple & de plus aisé à connoitre dans ce sujet, faisant toujours préceder ce qui est nécessaire pour entendre la suite, & sans rien oublier dont la connoissance soit nécessaire pour entendre ce qu'il propose. Mais comme l'attention est une chose pénible ; & que les démonstrations longues, quoique d'ailleurs claires, sont toujours difficiles ; il doit s'accommoder à la foiblesse de l'esprit, & ménager sa capacité. On l'accable lorsqu'on lui présente plusieurs choses à la fois ; il les faut donc partager en toutes leurs parties naturelles, de sorte qu'on les puisse considerer les unes après les autres séparément & avec ordre ; ce qui fait qu'on les conçoit & qu'on s'en souvient aisément. C'est ce qu'on a tâché de faire. Les Maîtres le doivent faire remarquer à ceux à qui ils enseigneront ces Elémens. Ils doivent en premier lieu leur en faire considerer le sujet, la distribution de tout l'Ouvrage, le soin qu'on prend de donner des idées nettes des choses qu'on veut faire connoitre ; & comme c'est de ces idées qu'ordinairement on tire les démonstrations dont on se sert, l'étude de ces Elémens faite avec ces réflexions pourra contribuer à former l'esprit, & servira de modele de la maniere dont il faut etudier & traiter les Sciences ; vue principale qu'on a ici, comme on l'a dit dans la Préface.

ELE-

ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.

LIVRE PREMIER.

De la première espece d'Etendue, qui est la Longueur. Des Lignes droites & circulaires.

SECTION PREMIERE.

Des differentes especes d'Etendue.

DEFINITION I.

I*L y a trois especes d'étendue, la Longueur, la Largeur, & la Profondeur, qui sont les trois dimensions du corps.* 1

L'objet de la Géometrie n'est pas cette étendue matérielle des corps, qui sont effectivement étendus en long, en large, & en profondeur; c'est une étendue intelligible, telle

que l'esprit la conçoit; en sorte que quand il n'y auroit point de corps au monde, ce que les Géometres démontrent de l'étendue n'en seroit pas moins vrai; & c'est pour cela que quoique les corps changent, les vérités de Géometrie sont immuables, parce qu'elles ne dépendent point de la matiere, mais des notions claires qui sont dans l'esprit. Ainsi quoiqu'il n'y ait point de corps sans trois dimensions, on peut considerer l'une sans faire attention à l'autre, la longueur sans considerer la largeur, & la largeur sans considerer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins sans faire réflexion sur leur largeur, & leur largeur sans penser à la profondeur de la terre. La notion de la longueur exclud celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclud celle de la profondeur; & ces notions ne sont point fausses, quoiqu'effectivement ces trois choses soient inséparables; parce que dans la maniere dont elles sont conçues, elles sont distinguées en ce que l'une est considerée sans l'autre. Ainsi les Géometres peuvent supposer en cette maniere des Etres qui soient longs sans être larges, & qui soient larges sans être profonds ou épais; & quand on voudroit soutenir que ces suppositions sont entierement fausses, les conséquences qu'on en tire ne pourroient être rejettées comme fausses. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il est évident que selon qu'on suppose que le cercle est une figure dont la circonference est en toutes ses parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes tirées du centre du cercle à la circonference soient égales.

DE-

DEFINITION II.

Le point est ce qui n'a aucune partie. 2

C'est-à-dire, dont on ne considere point les parties ; car tout ce qui est étendu a des parties. Or si le point n'est pas un rien, il est étendu ; ainsi on ne dit qu'il est sans parties, que parce qu'on ne fait point attention à celles qu'il peut avoir, & qu'on le considere comme indivisible.

DEFINITION III.

La ligne est une longueur sans largeur.

C'est-à-dire une étendue dont on ne considere 3 point la largeur, ou qu'on suppose n'avoir point de largeur. On peut concevoir que la ligne est la trace, ou l'écoulement d'un point qui se meut, ou qui change de place. Il y a de deux sortes de lignes, la ligne droite, & la ligne courbe.

DEFINITION IV.

La ligne droite est celle qui est la plus courte 4
qui puisse être menée entre deux points donnés.

On peut dire que c'est la trace que laisse un point qui se meut par le plus court chemin.

DEFINITION V.

La ligne courbe est celle qui n'est pas la plus 5
courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points.

Il y a des lignes courbes d'une infinité d'especes, de régulieres, & d'irrégulieres, de géometriques, & de méchaniques, mais dont on ne parlera point dans ces Elémens. On appelle lignes creuses celles qui sont composées de deux ou de plusieurs lignes, comme *A* & *B*. La ligne *A* faite de deux lignes, & la ligne *B* faite de plusieurs lignes, ne



peuvent être confiderées comme une feule ligne droite. Ainfi pour les diftinguer il faut les nommer creufes.

DEFINITION VI.

6 *La Surface eft une étendue longue & large fans profondeur.*

C'eft-à-dire une étendue longue & large, dont on ne confidere point la profondeur.

DEFINITION VII.

7 *La Surface droite ou plane, eft celle qui eft la plus courte entre deux lignes droites.*

On peut concevoir qu'une furface droite eft faite par le mouvement d'une ligne droite.

DEFINITION VIII.

8 *Surface courbe, celle qui eft plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une furface droite ou plane.*

DEFINITION IX.

9 *Le Solide eft une étendue qui a trois dimenfions, de la longueur, de la largeur & de la profondeur.*

Le folide eft l'écoulement de la furface. Tout folide eft un corps; entant qu'on prend ce nom pour ce qui eft étendu, qui a de la longueur, de la largeur, & de la profondeur. Etre étendu, & être corps, c'eft la même chofe, lorfque l'on ne confidere dans les corps que leur extenfion, & qu'on ne fait aucune attention à leurs qualités fenfibles, à la couleur, à l'odeur, & aux autres qualités qu'ils peuvent avoir.

SEC-

SECTION II.

De la longueur, qui est la premiere & la plus simple dimension du corps.

Des Lignes droites.

Propositions évidentes touchant les lignes droites, ou Corollaires de leur définition.

AVERTISSEMENT.

Ces propositions sont renfermées dans l'idée de la ligne droite; c'est-à-dire qu'on ne peut concevoir une ligne droite, qu'en même tems on n'apperçoive qu'elle n'est pas ce qu'on suppose qu'elle est, si ce qu'on va dire n'est pas vrai. Les Géometres supposent toutes ces propositions sans le dire. Je les exprime, parce qu'elles feront que les notions de la ligne droite, d'où l'on doit tirer la démonstration de ses proprietés, seront plus claires. Ces avis est pour toutes les propositions évidentes que je proposerai sur chaque sujet avant les Théorêmes. Il n'y a rien de plus important que d'avoir des notions claires & exactes des choses dont on recherche les proprietés.

PROPOSITION I.

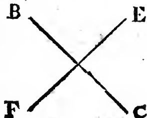
L*Es extrémités d'une ligne sont deux points.* 10
Les extrémités de la ligne X sont A & B qui sont indivisibles, premierement, quant à leur longueur; car si A avoit deux parties, par exemple E & F, ce seroit F qui seroit l'extrémité. En second lieu, puisque cette ligne X n'a ni largeur ni profondeur, les deux extrémités A & B n'ont ni largeur ni profondeur.

EF
A ——X—— B

Etant donc indiviſibles en tous ſens, ce ſont deux points. *

PROPOSITION II.

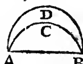
11 *Lorſque deux differentes lignes ſe coupent, leur ſection eſt un point indiviſible.*



La ligne *EF* coupe *BC*, ſi elle la coupe en deux differens points, cette ligne *EF* a de la largeur, ce qui eſt contre la définition de la ligne droite; la ſection de *BC* & d'*EF* eſt donc un point.

PROPOSITION III.

12 *Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, eſt plus grande que cette ligne droite.*





Les lignes courbes *ACB* & *ADB* ſont plus grandes que *AB*, & les lignes creuſes *EFG* & *EHF* ſont plus grandes que *EF*. C'eſt une ſuite de la notion de la ligne droite, qui eſt la plus courte qu'on puiſſe mener entre deux points.

PROPOSITION IV.

13 *Deux points étant donnés, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.*

L'inſtrument dont on ſe ſert pour mener une ligne droite eſt une règle. Pour connoitre ſi une règle eſt bonne, on tire avec elle une ligne, à laquelle on l'applique en differens ſens; & ſi après cela on trouve qu'elle convient toujours avec cette ligne, on juge qu'elle eſt juſte. Un moyen ſûr pour mener une ligne droite eſt de ſe ſervir d'un

* *ſup. n. 2.*

d'une filet fort ſubtil, comme pourroit être un cheveu; car après l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut ſans le rompre, ſelon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points.

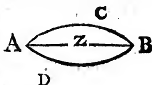
PROPOSITION V.

Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut être prolongée du même côté vers deux differens points. 14

On prolonge une ligne par le moyen d'une règle.

PROPOSITION VI.

Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite. 15



Si on peut mener pluſieurs lignes droites entre *A* & *B* autres que la ligne *Z*, il faut qu'elles s'écartent ou vers *C* ou vers *D*: ainſi elles ſeront plus longues que *Z*, par conſéquent elles ne ſeront pas droites * puiſqu'une ligne entre *A* & *B* ne peut être droite, qu'elle ne ſoit la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener entre ces deux points. On ne peut donc mener qu'une ſeule ligne droite entre *A* & *B*. On pourroit concevoir pluſieurs lignes entre deux points couchées les unes ſur les autres, mais elles ne ſeroient qu'une même ligne. Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de differentes lignes courbes. C'eſt pourquoi lorſqu'il s'agit de meſurer la diſtance d'un point à un autre point, on ne prend pas pour meſure une ligne courbe, mais une ligne droite.

* *n.* 4.

PROPOSITION VII.

16 *Deux lignes droites qui ont deux points communs, ne font qu'une même ligne droite.*

La ligne *BC* & la ligne *AD* ont deux points communs, favoir *A* & *B*, entre lefquels on ne peut concevoir qu'une ligne droite. Ainfi *AB* & *BA* ne font point deux differentes lignes. La ligne *BA* étant prolongée ne peut aller ailleurs qu'au même point *C*, ni *AB* ailleurs que vers *D*, lorfqu'on la prolonge; partant *AD* avec *BD* ne font qu'une même ligne droite; car entre *C* & *D* il n'y a qu'une feule ligne droite.



PROPOSITION VIII.

17 *Donc, la pofition d'une ligne droite ne dépend que de deux points.*

Car fi par les deux points donnés *A* & *B* l'on mene une ligne droite, elle fera celle que l'on cherche, puifqu'on ne peut mener par deux points plufieurs differentes lignes droites, toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne, par la propofition précédente.

PROPOSITION IX.

18 *Deux lignes droites qui fe croifent, ou qui fe coupent, ne fe peuvent rencontrer que dans ce feul point où elles fe coupent.*

Car fi elles fe rencontroient en deux points, elles ne feroient qu'une même ligne, par la feptieme propofition; ainfi elles ne feroient pas differentes l'une de l'autre, comme le font deux lignes qui fe croifent & qui fe coupent.

PROPOSITION X.

19 *La partie d'une ligne droite, eft une ligne droite.*

Qui

Qui dit partie d'une ligne droite, ne dit pas seulement un point.

SECTION III.
De la Ligne qui est circulaire.

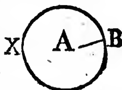
AVERTISSEMENT.

Le nombre des differentes especes de lignes courbes étant infini, je ne considere ici que la ligne courbe qui est circulaire, laquelle, après la ligne droite, est la plus simple & la plus aisée à connoitre.

DEFINITION I.

UNe ligne sur un plan, laquelle n'a ni com- 20
mencement ni fin, & qui dans toutes ses parties est également éloignée d'un même point, est un cercle. Ce point dont toutes les parties de cette ligne sont également éloignées, s'appelle le centre du cercle.

Concevons que dans la ligne *AB* l'extrémité *A* est immobile, pendant que *B* l'autre extrémité tourne; si *B* laisse une trace, ce sera un cercle dont toutes les parties sont éloignées du point *A* d'un intervalle égal; savoir *AB*. Ainsi *A* est le centre. Cette maniere dont un cerle se fait est si uniforme, qu'on ne peut concevoir aucune difference entre toutes ses parties.



DEFINITION II.

Le cercle, consideré comme une surface, en est 21
une au dedans de laquelle il y a un point également éloigné de ses bornes.

DEFINITION III.

22 *La ligne qui borne la surface d'un cercle, ou le cercle consideré comme ligne, s'appelle circonference.*

DEFINITION IV.

23 *Les lignes qui traversent la surface d'un cercle & passent par le centre, s'appellent diametres.*

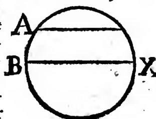
DEFINITION V.

24 *Les lignes qui partent du centre & se terminent à la circonference, se nomment rayons, ou demi-diametres.*

AB est un rayon du cercle *X*. [*fig. sup. n.* 20.]

DEFINITION VI.

25 *Les lignes qui se terminent à la circonference sans passer par le centre, ou qui sont menées d'un point de la circonference à un autre de ses points, se nomment cordes.*



A est une corde du cercle *X*, dont *B* qui passe par le centre est le diametre.

DEFINITION VII.

26 *La partie de la circonference qui se trouve entre les extrémités d'une corde, s'appelle arc.*

Lorsqu'une corde comme est *A* dans le cercle *X*, ne passe pas par le centre, il y a deux portions de circonference, qui se terminent aux extrémités de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, si l'on n'ajoute autre chose, on entend l'arc qui n'est pas le plus grand.

DEFINITION VIII.

27 *Toute circonference se conçoit divisée en trois-cens-soixante parties égales, qui se nomment degrés.*

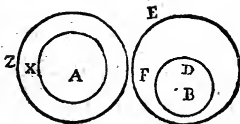
DEFINITION IX.

28 *Chaque degré se divise en soixante minutes, ou pe-*

petites parties, qu'on appelle premieres. Chaque minute ou premiere en ſoixante ſecondes, & chaque ſeconde en ſoixante tierces: ainſi à l'infini.

DEFINITION X.

Cercles concentriques, ſont ceux qui ſont décrits d'un même centre. Excentriques, qui n'ont pas même centre. 29



Z & *X* qui ont pour centre le même point *A*, ſont concentriques, & les cercles *E* & *F*, qui ont pour centres *D* & *B* deux points differens, ſont excentriques.

Propoſitions évidentes touchant la ligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces propoſitions ſont des conſéquences claires de la définition du cercle.

PROPOSITION I.

Un intervalle étant donné, on peut décrire une circonference. Eucl. Liv. I. Pr. 2. & 3. Liv. IV. Prop. 1. 30

L'inſtrument dont on ſe ſert ordinairement pour décrire un cercle, eſt un compas; avec lequel on peut, comme il eſt évident, prendre une ligne égale à une autre ligne donnée; & de deux lignes inégales retrancher de la plus grande une ligne égale à la plus petite. Ce qui fait la deuxieme & la troiſieme propoſition du premier d'Euclide, & la premiere du quatrieme.

PROPOSITION II.

31 *Dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales sont les cordes d'arcs égaux.* Eucl. III. Pr. 24.

C'est une suite de la simplicité & uniformité du cercle: toutes ses parties étant faites de même maniere, on ne peut concevoir aucune difference entre elles.

PROPOSITION III.

32 *Dans les mêmes cercles, ou dans les cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent les plus grands arcs, & les plus grands arcs ont de plus grandes cordes.* Eucl. III. Prop. 28 & 29.

PROPOSITION IV.

33 *Les arcs d'un pareil nombre de degrés sont plus grands dans les plus grands cercles, & plus petits dans les plus petits cercles.*

Cela est évident, car les parties d'un plus grand tout doivent être plus grandes. La centieme partie d'une toise est plus grande que la centieme partie d'un pied.

PROPOSITION V.

34 *Les arcs d'un pareil nombre de degrés ont de plus grandes cordes dans les grands cercles; & de plus petites dans les plus petits cercles.*

C'est encore une suite de la simplicité & uniformité du cercle. Tout doit être plus grand dans un plus grand cercle, le diametre, le rayon & la corde de tel & tel degré.

PROPOSITION VI.

35 *Le diametre coupe le cercle en deux parties égales, qui s'appellent demie circonference.*

On ne pourroit concevoir que le cercle fût uniforme en toutes ses parties, si cela n'étoit vrai.

PRO-

PROPOSITION VII.

Toutes les lignes tirées du centre à la circonference étant égales, tous les rayons étant égaux: celles qui sont plus petites que les rayons, ont leur extrémité au dedans du cercle: si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors: si égales, dans la circonference même. 36

Cela est évident, puisque la circonference est en toutes ses parties également éloignée du centre de l'intervalle du rayon.

PROPOSITION VIII.

Les cercles sont égaux dont les rayons sont égaux. 37

C'est la longueur du rayon qui fait que le cercle est plus grand ou plus petit.

PROPOSITION IX.

Deux cercles qui ont un même centre & un même rayon, ne sont pas differens. 38

Comme deux lignes droites entre deux mêmes points ne sont qu'une ligne.

SECTION IV.

De la differente position de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.

AVERTISSEMENT.

Deux lignes droites ne peuvent être disposées qu'en ces trois manieres; ou elles se rencontrent, ou elles se coupent, ou elles ne se rencontrent point. Quand elles se rencontrent, elles le peuvent faire de sorte, que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre, ou qu'elle ne panche pas plus. On considere ici ces trois positions.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES.

DEFINITION.

Une ligne qui tombe sur une autre ligne, ou qui la coupe de sorte qu'elle ne panche pas plus 39

plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.

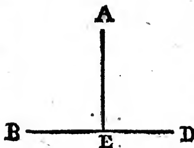
Propositions évidentes touchant les lignes perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Je ne fais ces propositions que pour rendre plus distincte la notion, que la définition précédente vient de donner de la ligne perpendiculaire.

PROPOSITION I.

40 *Une ligne tombant sur le milieu d'une autre ligne, si son sommet est également éloigné des extrémités de celle-ci, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainsi elle est perpendiculaire.*



AE tombe sur *E* le milieu de *BD*. Si *A* son sommet est également éloigné des extrémités *B* & *D* de la ligne *BD*, elle est perpendiculaire sur *BD*. C'est une suite de la notion de la ligne perpendiculaire que donne la définition précédente.

PROPOSITION II.

41 *Si deux points dans une ligne sont également distans des extrémités de la ligne sur laquelle elle tombe, chaque point de cette premiere ligne sera également distant des mêmes extrémités de la seconde ligne.*

Si les deux points *A* & *E* de la ligne *AE* sont également distans de *B* & de *D*, tous les autres points de *AE* seront également distans de *B* & de *D*. C'est une suite de ce que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On ne peut concevoir que quelque point dans la ligne

gne *AE* soit plus près de *B* que de *D*, qu'on ne conçoive que *AE* se courbe en ce point du côté de *B*; & qu'ainsi elle n'est pas une ligne droite, comme on le suppose.

PROPOSITION III.

Dans une perpendiculaire, si l'un de ses points est également éloigné de deux autres points de la ligne sur laquelle elle est élevée, tous ses autres points sont également éloignés de ceux-ci. 42

Si *AE* est perpendiculaire sur *BD* & que l'un de ses points *A* ou *E* soit également distant de *B* & de *D*, l'autre sera également éloigné des mêmes points *B* & *D*. Car si *A* est également distant de *B* & *D*, & que *E* ne le soit pas, alors *AE* panchera plus d'un côté que d'autre; ainsi elle ne sera pas perpendiculaire, contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est.

PROPOSITION IV.

Pour démontrer donc qu'une ligne est perpendiculaire sur une autre, il suffit de faire voir que deux de ses points sont chacun en égale distance de deux points de celle-ci. 43

Pour démontrer que *AE* est perpendiculaire sur *BD*, il suffit de prouver que ses points *A* & *E* sont chacun également éloignés de *B* & de *D*.

PROPOSITION V.

Le prolongement d'une ligne perpendiculaire sur une autre ligne, est une perpendiculaire sur celle-ci. 44

AE est perpendiculaire sur *BD*; son prolongement * *EC* est perpendiculaire sur *BD*; car ce n'est qu'une même ligne droite, & l'on ne peut pas concevoir la chose autrement, à moins que *AC* ne se courbe vers *B* ou vers *D*.

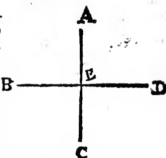
PROPOSITION VI.

Deux lignes sont perpendiculaires l'une sur l'autre, si l'une l'est sur l'autre. 45

Si

* Voy. la Fig. suivante.

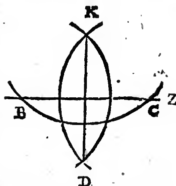
Si AC eſt perpendiculaire ſur BD, la ligne BD eſt perpendiculaire ſur AC. On ne peut concevoir que B panche plus vers A que vers C, qu'en même tems on ne conçoive que D panche plus vers C; & cela étant, A panchera plus vers B que vers D, car cela eſt réciproque. Ainſi AE ne ſeroit pas perpendiculaire ſur BD, contre la ſuppoſition. BD eſt donc perpendiculaire ſur AC, comme AC eſt perpendiculaire ſur BD.



PROBLEME I.

46 *D'un point donné hors d'une ligne tirer ſur elle une perpendiculaire.* Eucl. I. Prop. 12.

Du point K hors de la ligne Z il faut tirer une perpendiculaire ſur Z. 1°. De K comme centre je décris l'arc BC, ainſi B & C qui ſont dans la circonference de ce cercle & dans la ligne Z, ſont également éloignés de K. 2°. De C comme centre & de l'intervalle CK je décris un cercle, & du point B un ſecond du même intervalle. Ces deux cercles ſe coupent aux points K & D qui ſont ainſi également diſtans de B & de C. 3°. Par K & D je mene une ligne droite, dans laquelle les deux points K & D étant par la conſtruction également éloignés de B & de C, il faut

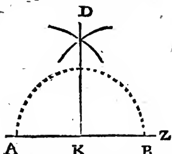


faut, comme on l'a dit*, que cette ligne *KD* soit perpendiculaire sur *Z*; ce qu'il faloit faire.

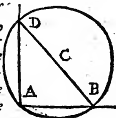
PROBLEME II.

Sur le point donné d'une ligne élever une perpendiculaire. Eucl. I. Prop. 11.

Soit *K* un point dans la ligne *Z*. Il faut élever sur elle au point *K* une perpendiculaire. 1°. De *K* comme centre je décris un cercle qui coupe *Z* en deux points, qui sont ici *A* & *B*. 2°. De ces deux points *A* & *B* comme centres, je décris deux autres cercles d'un même intervalle pris à discretion, de sorte que ces deux cercles se coupent. Je suppose que ce soit au point *D*. 3°. Je mene de ce point *D* une ligne au point *K*, qui est la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la construction, *D* est également éloigné de *A* & de *B*, dont le point *K* est aussi également éloigné par la construction; ainsi cette ligne ayant deux de ses points également éloignés de *A* & de *B*, elle est perpendiculaire sur *Z*. †.



Lorsque le point donné est sur l'extrémité de la ligne donnée, comme est A, *je prends à discretion le point* C, *&* *ouvrant le compas de l'intervalle* AC *je décris un cercle, & je mene le diametre* BD, *& du point de section* D, *je tire une autre ligne au point* A, *qui sera la perpendiculaire qu'on vou-*



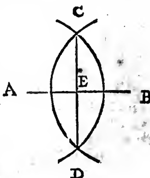
* *Sup. n.* 43. † *Sup. n.* 43.

vouloit élever : ce qu'on ne peut démontrer en ce lieu.

COROLLAIRE.

48 *De-là nous apprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales.* Eucl. I. Pr. 10.

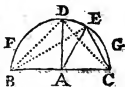
Soit *AB* une ligne droite ; de *A* & de *B* comme centres, je fais d'un même intervalle pris à discretion deux cercles qui se coupent en *C* & *D*, par où je mene une ligne qui est perpendiculaire sur *AB*, * puisque *D* & *C* sont également éloignés de *A* & de *B*. Or le point *E* commun aux deux lignes *DC* & *AB*, est également éloigné de *A* & de *B* †, ainsi *AE* est égal à *EB* ; par conséquent la ligne *AB* est coupée par la moitié.



THEOREME I.

49 *On ne peut élever sur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.*

AD est perpendiculaire sur la ligne *BC*. Il faut démontrer qu'on ne peut élever sur le point *A* une autre ligne qui soit perpendiculaire: que par exemple *AE* & toute autre ligne ne le peut être.



De *A* comme centre, je décris le cercle *BFDEGC*. Ainsi *B* & *C* sont également distans de *A*. Et *D* où ce cercle coupe la perpendiculaire est également éloigné de *B* & de *C*. ⊥ Donc $DB = DC$, ainsi les deux arcs *BFD* & *CGD* sont égaux ‡, par conséquent *D* est le milieu de l'arc *BFDEGC*. Si *EA* est perpendiculaire, par les mê-

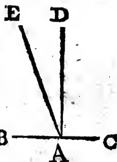
* *sup. n.* 43. † *sup. n.* 41. ⊥ *sup. n.* 42. ‡ *sup. n.* 31.

mêmes raisons $BE = CE$ & $BFDE = CGE$; par conséquent E est aussi le milieu de $BFD\,EGC$, ainsi $BFD = BFDE$ ce qui est absurde.

THEOREME II.

Une ligne tombant perpendiculairement sur le milieu d'une autre ligne, passe par tous les points également éloignés des extrémités de cette autre ligne. 50

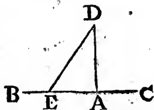
La ligne AD tombe perpendiculairement sur A, milieu de BC. Il faut prouver qu'elle passe par tous les points également éloignés de B & C, les extrémités de BC. Si on le conteste & qu'on veuille dire que le point E, par où AD ne passe pas, est également éloigné de B & de C, de ce point soit mené une ligne droite au point A, qui sera perpendiculaire sur BC puisqu'en deux de ces points A & E, elle est également éloignée de B & de C*. Or il ne se peut faire par le Theorême précédent, que sur le point A, il y ait deux perpendiculaires: il n'est donc pas vrai que le point E soit également éloigné de B & de C.



THEOREME III.

On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point sur une même ligne. 51

La ligne AD tombe perpendiculairement sur le milieu de la ligne BC, je dis qu'on ne peut du même point D mener une autre perpendiculaire sur BC; car cette ligne tomberoit de part ou d'autre de A; que ce soit en E: Alors le point E est également distant de B & de C:



* *Sup. n. 43.*

C * : donc BE est moitié de cette ligne. Mais AB en est aussi la moitié, ainsi $BA = BE$; ce qui est absurde. Donc, &c.

THEOREME IV.

52 *Dans un plan, deux lignes qui sont perpendiculaires sur une troisieme, ne se peuvent rencontrer.*

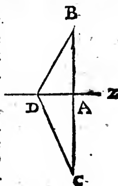
Car si elles se rencontroient ou se coupoient, du point de cette rencontre ou section il y auroit deux perpendiculaires sur la même ligne; ce qu'on vient de démontrer impossible.

AVERTISSEMENT.

L'on mesure la distance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'est la mesure la plus simple & la plus constante; puisqu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une seule perpendiculaire, & qu'outre cela elle est plus courte que toute autre ligne qu'on puisse tirer du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Théorême suivant.

THEORÊME V.

53 *La perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on puisse mener d'un point à une ligne.*



La ligne BA est perpendiculaire sur Z, il faut démontrer qu'elle est la plus courte de toutes les lignes qui puissent être menées du point B sur la ligne Z.

Prolongez BA jusqu'en C, en sorte que BA soit égal à AC; la ligne DA est perpendiculaire sur BC comme BC l'est sur AD †. Le point D est donc également éloigné de B & de C ‡, ainsi BD est égal à DC; mais la ligne droite BC est plus courte que la ligne BD

* *Sup. n.* 42. † *Sup. n* 45. ‡ *Sup. n.* 42.

$BD + DC$ *. Par conséquent AB, moitié de BC, est plus courte que BD moitié de $BD + DC$: ce qu'il faloit démontrer.

C'est une suite de la nature de la perpendiculaire, qui ne s'écartant point, & s'éloignant également des extrémités de la ligne, sur le milieu de laquelle elle tombe, va par le chemin le plus droit, & par conséquent le plus court.

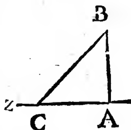
DES LIGNES OBLIQUES.

DEFINITION I.

Les lignes qui panchent plus vers un côté que vers l'autre de la ligne qu'elles rencontrent, s'appellent obliques. 54

DEFINITION II.

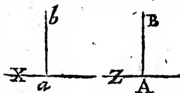
BC *est une ligne oblique sur* Z; *ayant mené de* B *son extrémité, la perpendiculaire* AB, *la ligne* AC *entre* A, *pied de la perpendiculaire, &* C *le pied de l'oblique, est l'éloignement du perpendicule, & cet éloignement est la mesure de l'obliquité de* BC. *Ainsi une ligne est plus oblique, lorsque son éloignement du perpendicule est plus grand.* 55



LEMME I.

Deux lignes droites, qui ont sur elles chacune une perpendiculaire, étant posées l'une sur l'autre, de sorte que les pieds de ces perpendiculaires soient l'un sur l'autre, ces deux perpendiculaires conviendront. 56

AB est perpendiculaire sur Z, & ab sur X. Il faut prouver que si l'on pose X sur Z de sorte que a soit mis sur A, les deux per-

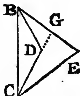


* *Sup. n. 12.*

perpendiculaires AB & ab conviendront. Car puiſqu'après cette ſuperpoſition, Z & X ne ſont plus qu'une ligne, AB ſera perpendiculaire ſur l'une & ſur l'autre, comme auſſi ab. Donc ſi AB & ab ne convenoient pas, il y auroit deux perpendiculaires ſur une même ligne au même point; ce qui eſt impoſſible. *

LEMME II.

57 *Si des extrémitez d'une ligne l'on en mene quatre autres, dont deux ſe joignent dans un point plus proche de la ligne donnée que les deux autres, je dis que la ſomme des deux dernieres ſera plus grande que la ſomme des deux autres.* Eucl. I. prop. 21.



Soit la ligne donnée BC, & des points B & C ſoient menées les deux lignes BD, CD, & les deux autres BE, CE. Je dis que $BE+CE$ eſt plus grande que $BD+CD$.

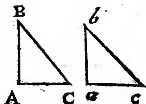
1°. La ligne droite entre deux points étant la plus courte, † $CE+EG$ eſt plus grand que $CD+DG$, & par la même raiſon $BG+GD$ eſt plus grand que BD. Donc $CE+EG+GD+BG$ eſt plus grand que $CD+DG+BD$. Otant de part & d'autre DG, ſelon l'Axiome 7. le reſte $CE+EG+BG$ ou $CE+EB$ ſera plus grand que $BD+DC$; ce qu'il faloit prouver.

THEOREME I.

58 *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans l'éloignement du perpendicule, les lignes obliques ſont égales.*

AB eſt perpendiculaire ſur AC, & ab ſur ac. Ces deux perpendiculaires ſont égales; comme auſſi AC éloignement du perpendicule AB eſt égal

* *Sup. n.* 49. † *Sup. n.* 12.

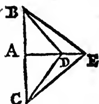


égal à *a c* éloignement du perpendicule *a b*. Il faut prouver que *BC = bc*.

Par le premier Lemme, ayant posé *ac* sur *AC* deux lignes égales, la perpendiculaire *ab* conviendra avec la perpendiculaire *AB*, qui étant égales, *b* conviendra avec *B*, & *c* avec *C*; ainsi *b c* avec *B C*; ce qu'il faloit démontrer.

THEOREME II.

59 *Les lignes obliques menées du même point à une même ligne sont plus longues, si elles sont plus éloignées de la perpendiculaire.*



Il faut prouver que *B E* est plus longue que *BD*. Pour cela soit prolongé *B A* jusqu'à *C*, de sorte que *AB = AC*. Alors, * *BD = DC* & *BE = EC*. Or *BE + EC* est plus grande que *BD + DC* par le II. Lemme: Donc *BE* moitié de *BE + EC* est plus grande que *BD* moitié de *BD + DC*, selon l'Axiome neuvieme.

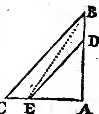
THEOREME III.

60 *Une ligne oblique est plus grande, dont la perpendiculaire, & l'éloignement du perpendicule, sont plus grands: & si l'éloignement du perpendicule est le même & l'oblique plus grande, la perpendiculaire est plus grande.*

Soient 1°. *BC* & *DE* † deux lignes obliques, la perpendiculaire *AB* est plus grande que *AD*; & *AC* l'éloignement du perpendicule de *BA*, est plus grand que *AE* celui de *DA*: je dis que l'oblique *BC* est plus grande que l'oblique *DE*. Car par le Théorême précédent, *AB* est plus grande que *BE*; & puisque *AC* est perpendicu-

* *Sup. n.* 58. † Voy. la Fig. suiv.

culaire sur AB, par le même Théorême, BE est plus grande que DE: par conséquent BC plus grande que BE, sera encore plus grande que DE.

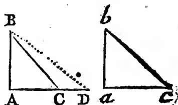


2°. AE est le même éloignement: je dis que si BE est plus grande que DE, la perpendiculaire AB est plus grande que la perpendiculaire AD. Car si AD étoit plus grand que AB, ou égal, alors par le précédent Théorême, ou par le premier, BE seroit plus petit que DE, ou égal l'un & l'autre, contre la supposition qu'on fait que BE est plus grande.

THEOREME IV.

61 *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.*

Soit $AB=ab$, & $BC=bc$. Il faut prouver que $AC=ac$. Ayant posé ab sur AB, ces deux lignes égales conviendront entierement; & par le premier Lemme, la perpendiculaire ac conviendra au moins en partie avc la perpendiculaire AC. Si $AC \angle ac$, & qu'ainsi c ne convienne pas avec C, mais avec D, alors bc conviendra avec BD; mais $BD > BC$ *, ce qui est contre ce qu'on suppose $BC=bc$. On auroit conclu une égale absurdité, si AC avoit été supposée plus grande que ac. Partant il faut que $AC=ac$, ce qu'il faloit démontrer.



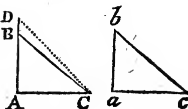
THEO-

* *sup. n. 59.*

THEOREME V.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendicule, les perpendiculaires sont égales. 62

Soit $AC=ac$, & $BC=bc$. Il faut prouver que $AB=ab$. Soit posé ac sur AC, ces deux lignes égales conviendront, & la perpendiculaire ab avec la perpendiculaire AB, au moins en partie, par le premier Lemme*. Si l'on dit que $AB \angle ab$, & qu'ainsi b convient avec D, alors bc conviendra avec DC, ainsi lui sera égale, & partant DC † plus grande que BC, à qui on la suppose égale. On auroit aussi conclu une égale absurdité, si AB avoit été supposée plus grande que ab. Il faut donc que ab convienne entierement avec AB, & qu'ainsi $AB=ab$; ce qu'il falloit prouver.



DES LIGNES PARALLELES.

DEFINITION.

Deux lignes droites qui sont également distantes l'une de l'autre dans toutes leurs parties, sont dites paralleles. 63

Propositions évidentes, touchant les lignes paralleles.

AVERTISSEMENT.

Ces Propositions sont des Corollaires de la Définition des lignes paralleles.

B PRO-

* *sup. n. 56.* † *sup. n. 59.*

PROPOSITION I.

64 *Une ligne droite qui est également éloignée en deux de ses points d'une autre ligne droite, est parallele à cette ligne.*

Car la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points ; ainsi ces deux lignes étant également éloignées l'une de l'autre, elles sont paralleles selon la définition.

PROPOSITION II.

65 *Les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales.*

Ces perpendiculaires sont la mesure de la distance de ces deux paralleles, qui étant partout la même, sont égales.

PROPOSITION III.

65 *Deux lignes paralleles étant prolongées à l'infini, ne se rencontreront point.*

Car elles ne peuvent se rencontrer qu'elles ne s'approchent d'un côté ; ainsi elles ne sont plus dans la même distance ; par conséquent elles ne sont plus paralleles, ainsi qu'on le suppose.

PROPOSITION IV.

67 *Deux lignes droites qui ne sont pas paralleles, mais qui s'approchent plus d'un côté que d'un autre, se rencontrent enfin, si on les prolonge assez.*

Cela est évident.

AVERTISSEMENT.

Cela ne se doit entendre que des lignes droites ; car il y a des lignes courbes dont la nature est telle, qu'il y a des lignes droites qui s'en approchent toujours sans jamais les rencontrer, comme on le démontre ; & ces lignes droites s'appellent les Asymptotes de ces courbes.

PROPOSITION V.

68 *Deux lignes qui sont perpendiculaires sur une même ligne, sont paralleles entre elles.*

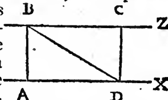
Car ces deux perpendiculaires ne se rencontre-

treront jamais [a]. Or si elles n'étoient pas paralleles, elles se rencontreroient, selon la Proposition précédente ; elles sont donc paralleles.

LEMME I.

Entre deux paralleles, les lignes perpendiculaires sur l'une le sont sur l'autre. 69

Si *AB* perpendiculaire sur *X*, ne l'est pas sur *Z*, donc *Z* ne l'est pas sur *AB* [b] ; ainsi étant inclinée sur cette ligne *AB*, elle s'approchera ou d'un côté ou d'autre de la ligne *X*, & la rencontrera [c] : par conséquent elle ne lui est pas parallele, contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est.



LEMME II.

La ligne AB *ne peut être perpendiculaire sur* Z *&* X, *que ces deux lignes ne soient paralleles.* 70

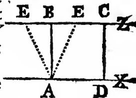
Car ces deux lignes (*même figure*) sont réciproquement perpendiculaires sur *AB* [d] ; partant elles sont paralleles [e].

LEMME III.

Si entre deux lignes droites, sont deux autres lignes droites égales, dont l'une est perpendiculaire sur la premiere & l'autre sur la seconde, je dis que ces deux premieres lignes sont paralleles. 71

Entre *Z* & *X* sont *AB* & *CD* deux lignes égales, dont *AB* est perpendiculaire sur *X* & *CD* sur *Z* : je dis que *Z* & *X* sont paralleles.

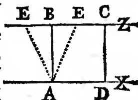
Car si *Z* n'est pas parallele à *X*, elle s'en éloignera ou



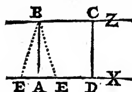
 s'en

a *sup. n.* 52. b *sup. n.* 45. c *sup. n.* 67. d *sup. n.* 45.
e *sup. n.* 68.

s'en approchera : on montrera que l'un & l'autre est absurde ; ainsi il faut qu'elles soient paralleles.



1°. Si on suppose qu'elle s'éloigne, ayant du point *A*, tiré *AE* perpendiculaire sur *Z*[a], alors si cette perpendiculaire convient avec *AB*, *Z* & *X* seront perpendiculaires sur *AB* par la construction, & ainsi paralleles entre elles[b], contre la supposition. Que si *AE* tombe à côté de *AB*, la perpendiculaire *AE* sera plus courte que l'oblique *AB*[c] : par conséquent aussi plus courte que *CD*=*AB*[d], ainsi la ligne *Z* s'approchera de la ligne *X*, contre la supposition.



2°. Si on suppose que la ligne *Z* s'approche de la ligne *X*, il y aura une semblable absurdité : car au point *B* ayant élevé sur la ligne *Z* la perpendiculaire *BE*[e], comme *AB* est perpendiculaire sur *X*, si elle convient avec *AB*, alors, suivant ce qui vient d'être dit, *Z* & *X* seront paralleles ; mais si *BE* tombe à côté, comme *AB* a été proposée perpendiculaire sur *X*, *BE* sera oblique, & par conséquent *BE* plus grande que *BA*[f] ou que son égale *CD* ; ainsi *Z* & *X* s'éloigneront, contre la supposition qui avoit été faite de s'approcher : ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME.

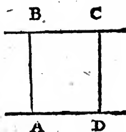
72 *Par un point donné mener une ligne parallele à une ligne donnée.* Eucl. I. Prop. 31.

Soit *AB* une ligne à laquelle il faut mener une parallele par le point donné *C*. De ce point

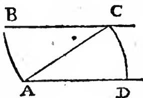
C

a *sup. n.* 46. b *sup. n.* 61. c *sup. n.* 53. d *sup. Axiome* 3. e *sup. n.* 47. f *sup. n.* 51.

C j'abaisse une perpendiculaire sur la ligne donnée *AD*, sur laquelle ayant élevé une perpendiculaire telle qu'*AB* égale à *CD*, il est clair que la ligne qui passera par les deux points *B* & *C* sera parallele à *AD*, suivant la Définition *.



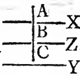
Voici encore une autre maniere. D'un point quelconque A, *soit décrit un Arc de telle ouverture qu'il passe par le point donné* C, *duquel & de la même ouverture* AC *ayant fait l'Arc* AB *égal à* DC, *la ligne menée par les points* B & C *sera la parallele requise.*



THEORÊME.

Deux lignes paralleles à une troisieme sont paralleles entre elles. Eucl. I. Prop. 30. 73

X & *Y* sont paralleles avec *Z*. De *X* je mene *AB* perpendiculaire sur *Z*, laquelle étant prolongée jusqu'en *C*, puisqu'elle est perpendiculaire sur *Z*, elle le sera sur *Y*, parallele avec *Z* †; & puisque *Z* est parallele avec *X*, cette ligne perpendiculaire sur *Z* le sera aussi sur *X* parallele avec *Z* ⊥. Ainsi puisque *X* & *Y* sont perpendiculaires sur *AC*, elles sont paralleles entre elles ‡: ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

On ne sauroit faire passer par le même point deux differentes lignes qui soient paralleles à une même. 74

Car il faudroit par ce Théorême qu'elles fussent

* *Sup. n.* 63. † *Sup. n.* 69. ⊥ *Sup. n.* 69. ‡ *Sup. n.* 68.

ſent paralleles entre elles, ce qui eſt abſurde, puiſqu'elles auroient un point commun, & qu'il eſt de l'eſſence des paralleles de ne ſe rencontrer jamais.

SECTION V.

De la differente poſition de deux Cercles au regard l'un de l'autre.

AVERTISSEMENT.

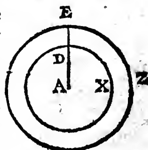
Un cercle peut être poſé tellement au regard d'un autre cercle, 1°. Qu'il ne le coupe ni ne le touche point. 2°. Qu'il le coupe; ou que ſans le couper, il le touche ou en dedans ou en dehors.

Propoſitions évidentes touchant la poſition des Cercles.

PROPOSITION I.

75 LES *cercles concentriques ne peuvent ni ſe couper ni ſe toucher.*

On peut concevoir que les cerles *X* & *Z* concentriques dont *A* eſt le centre, ſont faits par les points *D* & *E* de la même ligne *AE*. Ainſi le cercle que décrira *D* ſera toujours au dedans du cercle *Z* que décrira *E*. Ces deux cercles ne ſe peuvent donc rencontrer.



PROPOSITION II.

76 *Deux cercles concentriques ſont toujours en même diſtance.*

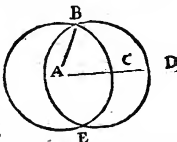
Car entre *X* & *Z* il y a toujours la même diſtance *DE*.

THEO-

THEOREME I.

Deux cercles qui se coupent ne sont pas concentriques. Eucl. III. Prop. V. 77

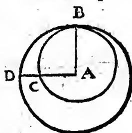
Soient deux cercles qui se coupent aux points *B* & *E*, je dis qu'ils n'ont pas pour centre un même point. Car si *A* est le centre de ces deux cercles qui se coupent au point *B*, les lignes *AB* & *AC* rayons du même cercle sont égales. [a] *AC* $= AB$. Et par la même raison $AB = AD$. Ainsi $AC = AB = AD$; donc $AC = AD$ [b]. C'est-à-dire, que la partie est égale au tout, ce qui ne peut pas être [c].



THEOREME II.

Deux cercles qui se touchent ne sont pas concentriques, ou n'ont pas même centre. Eucl. III. Prop. 6. 78

Soient deux cercles qui se touchent au point *B*, je dis qu'ils n'ont point le même centre; car si *A* étoit le centre de ces deux cercles, alors $AD = AB$ & $AB = AC$ [d]: par conséquent $AD = AB = AC$; ainsi $AD = AC$ [e], c'est-à-dire, que la partie *AC* seroit égale à son tout *AD*, ce qui est absurde.



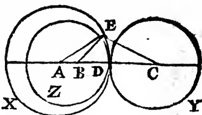
THEOREME III.

Si deux ou plusieurs cercles ont leur centre dans une même ligne, qu'ils coupent dans un même point, ils se touchent en ce seul point. 79

 Les

a *Sup. n.* 20. b *Sup. Ax.* 3 c *Sup. Ax.* 1. d *Sup. n.* 20. e *Sup. Ax.* 3.

Les cercles X, Z, Y, ont leurs centres dans la même ligne qu'ils coupent au point D. Il faut prouver qu'ils se touchent en ce seul point D. Si l'on prétend qu'ils se touchent ailleurs, ou qu'ils se rencontrent en E; alors $AE = AD$, puisque ce sont les rayons d'un même cercle. Par la même raison $CD = CE$. Partant $AE + CE = AD + CD$, ce qui est absurde*. De même on démontre que Z & X ne se rencontrent point en E; car s'ils se rencontroient, $BD = BE$, & $AE = AD$; mais $AD = AB + BD$, ou $AB + BE$; Donc $AE = AB + BE$, ce qui est absurde †.



COROLLAIRE.

80 *Deux cercles ne se peuvent toucher en dedans ou en dehors qu'en un seul point.* Eucl. III. Prop. 13.

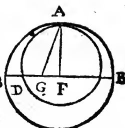
X & Z se touchent en dedans, (même figure.) Si c'est au point D, ils ne se peuvent toucher ailleurs, par exemple, au point E. S'ils se touchent en E, ils ne se peuvent toucher en D, car $AB + BE$ seroit égal à AE, ce qui est absurde‡. Que X & Y se touchent en dehors, si c'est au point D, ils ne se peuvent toucher dans un autre, par exemple en E, car alors $AC = AE + EC$, ce qui est absurde ‡.

THEOREME IV.

81 *Si deux cercles se touchent en dedans, la ligne droite qui joindra leurs centres étant prolongée tombera sur le point d'attouchement de ces deux cercles.* Eucl. III. Prop. 11.

1°. Par le Théorême II. ces deux cercles n'ont pas un même centre. 2°. Soit F, centre de BAB: si

* *sup. n.* 12. † *sup. n.* 12. ‡ *sup. n.* 12. ‡ *sup. n.* 12.

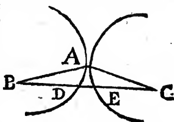


ſi on veut que *G* le ſoit de *DAD* qui n'eſt pas dans la ligne *FA*, qui paſſe par *A* point de l'attouchement, alors $GA = GD$ a. Ainſi $FG + GA = FG + GD$ b. Or $FG + GA > FA$ c, & par conſéquent que *FB*, car $FA = FB$ d. Ainſi $FG + GD > FB$ ou $FG + GB$. Otant donc *FG*, partie commune, reſtera $GD >$ que le tout *GB* e, ce qui eſt impoſſible.

* THEOREME V.

Si deux cercles ſe touchent en dehors, une ligne droite menée par leurs centres, paſſera par le point de leur attouchement. Eucl. III. Prop. 12. 82

Soient deux cercles *DAD* & *EAE* qui ſe touchent en *A*. Je dis que la ligne qui joindra leurs centres paſſera par le point *A*. Si on le nie, on eſt contraint de dire une choſe abſurde; car que *B* ſoit centre de *DAD*, & *C* de *EAE*, & qu'ainſi la ligne *BC* ne paſſera pas par *A* où ces deux cercles ſe touchent: $BA = BD$ & $CA = CE$ f. Donc $BA + AC = BD + CE$. Puiſque *BC* ne paſſe pas par le point d'attouchement de ces deux cercles qui eſt commun, *D* & *E* ne ſont pas un même point: il y a entre deux un intervalle, ſavoir *DE*, je l'ajoute à $BD + CE$; alors $BD + DE + CE$ eſt plus grand que $AB + AC$, ce qui eſt abſurde g.



SEC-

a *ſup. n.* 20. b *ſup. Axiome* 4. c *ſup. n.* 12. d *ſup. n.* 20. e *ſup. Axiome* 7. f *ſup. n.* 20 g *ſup. n.* 12.

SECTION VI.

De la poſition d'une Ligne droite au regard d'un Cercle.

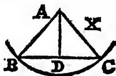
AVERTISSEMENT.

Une ligne droite peut être entierement dans un cercle, ou au dehors. Si elle eſt dehors, elle le peut quelquefois atteindre, lorſqu'on la prolonge; de ſorte quelle le coupe ou qu'elle le touche ſeulement ſans y entrer.

* THEOREME I.

83 *Si en la circonference d'un cercle on prend deux points comme on voudra, la ligne droite menée de l'un à l'autre de ces deux points, tombera dans le cercle.* Eucl. III. Prop. 2.

B & *C* ſont deux points dans la circonference du cercle *X*; il faut prouver que la ligne *BC* menée entre ces points eſt entierement dans ce cercle. De *A* centre de *X* ſoit ſur *D* milieu de *BC* une ligne droite; puiſque *AB* & *AC* rayons de *X* ſont égaux, & que *D* eſt le milieu de *BC*, cette ligne *AD* eſt perpendiculaire[a], & partant plus courte que *AB* & *AC*[b]. Ainſi *D* eſt dans le cercle[c]. Or toute autre ligne oblique menée de *A* ſur *BC*, ſera auſſi plus courte que *AB* & *AC*[d]. La ligne *BC* eſt donc entierement dans le cercle.



THEOREME II.

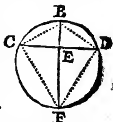
84 *Si une corde eſt coupée perpendiculairement en deux parties égales, par une ligne, je dis que cette ligne coupe l'arc du cercle en deux également, & paſſe par le centre.*

Soit la corde *CD* coupée perpendiculairement en deux parties égales par la ligne *BF* au point *E*,

a *ſup. n.* 36. b *ſup. n.* 40. c *ſup. n.* 53. d *ſup. n.* 59.

E, je dis que cette ligne coupe l'arc *CD* en deux également en *B*, & passe par le centre du cercle.

1°. Puisque le point *E* est également éloigné des points *C* & *D*, & que *BF* est perpendiculaire sur *CD*, le point *B* qui est dans cette perpendiculaire sera aussi également éloigné des points *C* & *D* [a], & partant la corde *BC* égale à la corde *BD*, & par conséquent l'arc *BC* égal à l'arc *BD* [b]; ainsi l'arc *CBD* est coupé en deux également: la même chose sera pour l'arc *CFD*.



2°. La perpendiculaire *BF* passe par tous les points également éloignez de *C* & de *D* [c]. Or le centre de ce cercle est également éloigné de ces deux points *C* & *D*; donc *BF* passe par ce centre.

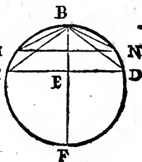
COROLLAIRE I.

85 *Il est évident que pour couper un arc en deux parties égales, il faut élever sur la moitié de sa corde une perpendiculaire.* Eucl. III. Prop. 30.

COROLLAIRE II.

86 *Les deux arcs compris entre deux lignes paralleles sont égaux.*

Les deux arcs *MC* & *ND*, compris entre les deux lignes ou cordes paralleles *MN* & *CD* sont égaux; car ayant tiré le diametre *BF* perpendiculaire sur *CD* [d], il le fera aussi sur *MN* [e]; ainsi $BM = BN$ & $BC = BD$ [f]. Les arcs de ces cordes égales seront égaux



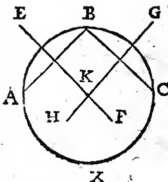
a *sup. n.* 42. b *sup. n.* 31. c *sup. n.* 42.
d *sup. n.* 46. e *sup. n.* 69. f *sup. n.* 42.

egaux *. Donc l'arc $BC - BM = BD - BN$; mais l'arc BC moins l'arc BM est égal à l'arc CM, & pareillement $BD - BN = ND$; donc $CM = ND$: ce qu'il falloit démontrer. Que si, au-lieu de la corde MN on avoit supposé en B une Tangente parallele à CD, on auroit démontré encore plus promptement l'arc BC égal à l'arc BD.

PROBLEME I.

87 *Trois points étant donnez, trouver le centre d'un cercle qui passe par ces points.* Euclid. III. Prop. 1.

Soient trois points donnez A, B, C. On les joindra par deux droites AB, BC, que l'on regardera comme les cordes du cercle cherché; & menant deux perpendiculaires sur le milieu de ces deux lignes, je dis que le point K où ces deux lignes se coupent, est le centre du cercle que l'on demande: ce qui est évident par le Théorême précédent.



Si les trois points donnez étoient dans une ligne droite, la question auroit été impossible, comme il est évident; car alors les deux perpendiculaires ne se couperoient pas, étant paralleles.

COROLLAIRE I.

88 *Deux cercles ne peuvent avoir trois points communs, comme* A, B, C, *qu'ils ne les ayent tous.*

Ces deux cercles ayant un même centre, savoir K, & étant décrits d'un même intervalle, ils ne peuvent être qu'un même cercle †.

Co-

* *sup. n* 31. † *sup. n.* 38.

COROLLAIRE II.

Deux cercles ne se peuvent couper en plus de deux points. Eucl. III. Prop. 10. 89

Car s'ils se coupoient en trois, ils auroient trois points communs; ainsi par le Corollaire précédent ce ne seroit pas deux differens cercles.

COROLLAIRE III.

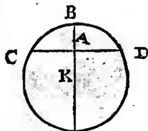
Une portion de cercle étant donnée, on peut achever le cercle. Eucl. III. Prop. 25. 90

Marquez trois points dans cette portion, après quoi vous pouvez trouver le centre du cercle dont elle est partie par le Problême précédent.

THEOREME III.

Si une ligne coupe la corde ou l'arc d'un cercle en deux parties égales, & passe par le centre, je dis qu'elle la coupe perpendiculairement. Eucl. III. Prop. 3. 91

Soit la ligne BK, qui coupe l'arc, ou la corde d'un cercle, en deux parties égales & passe par le centre K; je dis qu'elle coupe cette corde perpendiculairement; car il y a dans cette ligne BK deux points, savoir A ou B, & K également éloignez de C & de D, puisque A est la moitié de la ligne CD, & B moitié de l'arc CBD, & que K est le centre. Donc BK est perpendiculaire*.



THEOREME IV.

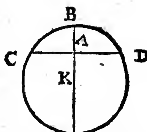
Si une ligne coupe perpendiculairement la corde d'un cercle, & passe par le centre, je dis qu'elle la coupe en deux parties égales. Eucl. III. Prop. 3. 92

La ligne BK passe par le centre K, & est per-

B 7 pen-

* *sup. n.* 40.

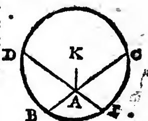
pendiculaire ſur CD ; je dis qu'elle coupe CD par la moitié. Le centre eſt également éloigné de C & de D, & BK étant perpendiculaire, le point A & tous les autres de BK doivent être également éloignez de C & de D*. Donc $AC \doteq AD$; ainſi CD eſt coupé par la moitié.



THEOREME V.

93 *Deux cordes qui ne paſſent pas par le centre, ne ſe peuvent couper par le milieu.* Eucl. III. Prop. 4.

Soient deux cordes DE, BC, qui ſe coupent au point A, autre que le centre du cercle; je dis qu'elles ne ſe coupent pas en parties égales. Si ces deux cordes ſe coupent en A, qui n'eſt pas le centre, & que ce point ſoit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de A une ligne au centre K, cette ligne KA ſera perpendiculaire ſur BC & ſur DE†. Donc BC & DE ſeront perpendiculaires ſur KA⊥; ainſi ſur le même point A il y a deux perpendiculaires, ce qui eſt impoſſible‡.



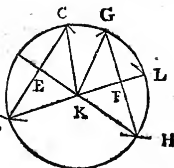
THEOREME VI.

94 *Les cordes qui ſont également éloignées du centre ſont égales ; & ſi elles ſont égales, leurs diſtances du centre ſont égales.* Eucl. III. Prop. 14.

Soient les cordes BC & GH également éloignées du centre K ; je dis qu'elles ſont égales ; & ſi elles ſont égales, leurs diſtances KE & KF du centre ſont égales.

1°. Je mene ſur ces cordes les perpendiculai-

* *ſup. n.* 42. † *ſup. n* 91. ⊥ *ſup. n.* 45. ‡ *ſup. n.* 49.

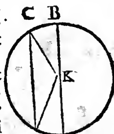


laires DK & KL qui les coupent par le milieu *. Par l'hypothese $KE = KF$, & puisque $BK = KH$ & $KC = KG$: donc l'oblique KB étant égale à l'oblique KH, & les perpendiculaires KE & KF de ces obliques étant égales, les éloignemens du perpendicule BE & HF seront égaux †. Par la même voye on prouve que $EC = FG$; qu'ainsi $BC = HG$; ce qu'il falloit prouver.

2°. On a montré que les obliques comme KB & KH étant égales, & les distances BE & HF du perpendicule étant égales, les perpendiculaires KE & KF sont égales ‡.

THEOREME VII.

95 *De toutes les lignes qui sont dans le cercle, le diametre ou la ligne qui passe par le centre est la plus grande.* Eucl. III. Prop. 15.



Soit la ligne AB le diametre, il faut prouver qu'il est plus grand que CD, ou que quelque autre ligne que ce soit qui ne puisse passer par le centre: ce qui est évident. Car $KC = KB$, & $KD = KA$; ainsi $BA = KC + KD$ Or $KC + KD$ est plus grand que CD ‡; donc BA est plus grand que CD.

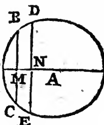
THEOREME VIII.

96 *Les cordes les plus proches du centre du cercle sont les plus grandes, & les plus grandes sont les plus*

* *sup. n.* 92. † *sup. n.* 61. ‡ *sup. n.* 62. ‡ *sup. n.* 12.

plus proches du centre du cercle. Eucl. III. Prop. 15.

A soit le centre d'un cercle, & les lignes proposées soient *BC*, & *DE*. Il faut prouver que *DE* qui est plus proche du centre *A*, est plus grande que *BC* qui en est plus éloignée.

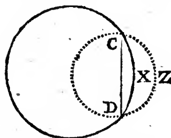


La distance de *BC* est *AM*, & celle de *DE* est *AN*, laquelle distance est plus petite. Il faut prouver que *DE* qui est plus proche du centre est plus grande que *BC*, qui en est plus éloignée, ce qui est évident; car l'arc *EFD* est plus grand que l'arc *CFB*: Or les plus grands arcs ont de plus grandes cordes*. Donc *DE* corde de *EFD* est plus grande que *BC* corde de *CFB*. C'est ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IX.

97 *Si une ligne est la corde commune de deux arcs de cercles inégaux qui se coupent, je dis que l'arc du petit cercle contient plus de degrez que l'arc du grand.*

Soient deux cercles inégaux *X* & *Z* qui se coupent aux points *C* & *D*, la corde *CD* leur est commune. Je dis que l'arc *CZD* du petit cercle contient plus de degrez que l'arc *CXD* du grand. Car si les deux arcs dont *CD* est la corde étoient les mêmes, qu'ils fussent par exemple également de dix degrez, il ne seroit pas vrai, comme on en est convenu †, que les arcs d'un pareil nombre de degrez ont



* *Sup. n.* 32. † *Sup. n.* 33.

ont de plus grandes cordes dans les plus grands cercles.

COROLLAIRE

Donc une même ligne ne peut être la corde de deux arcs d'un pareil nombre de degrez, qui soient portions de cercles inégaux. 98

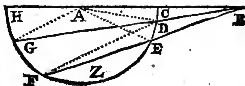
AVERTISSEMENT.

Il a été observé sup. n. 26. qu'on considere toujours le plus petit arc de chaque cercle, à moins qu'il ne soit expliqué autrement.

THEOREME X.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on mene plusieurs lignes qui le traversent & se terminent à la circonference, je dis 1° De toutes celles qui tomberont sur la partie convexe, celle qui passera par le centre étant prolongée, sera la plus courte. Celles ensuite qui seront plus près d'elle, seront plus courtes que les plus éloignées. 2°. C'est le contraire dans des lignes qui tombent sur la partie concave. Eucl. III. Prop. 8. 99

Soit le point *B*, duquel on ait mené les lignes *BH*, *BG* *BF*; je dis 1°. Que *BC* qui passe par le centre est plus courte que toute autre menée du même point, par exemple, que *BD*.



Car $AC = AD$: Or $AC + CB$ est plus courte que $AD + DB$*. Donc BC sera plus courte que BD†. $AD = AE$. Or $AD + DB$ est plus court

* *Sup. n. 12.* † *Sup. Ax. 7.*

court que $AE + EB$[a]. Donc retranchant les grandeurs égales AD & AE, le reste DB sera plus court que le reste BE[b].

2°. Que BH qui passe par le centre est la plus grande; car $AB + AH = AB + AG$. Or $AB + AG$ est plus grand que BG[c]. Donc BH est plus grand que BG. Il est pareillement évident que $BD + DF$ est plus grand que BF[d]. Or DG, est plus grand que DF[e]. Donc $BD + DG$ est plus grand que BF.

COROLLAIRE.

100 *S'il y a deux lignes droites égales ou inégales posées l'une sur l'autre, & convenantes par un point d'une de leurs extrémitez, sur lequel l'une ou l'autre tourne circulairement, en s'écartant, la ligne qui joindra leurs autres extrémitez deviendra toujours plus grande jusques à ce que ces deux lignes ne fassent qu'une seule ligne droite.*

Soient deux lignes AB, AC, sur AB figure précédente; dont AC tournera circulairement sur l'extrémité A, en s'écartant de AB, passant par D, E, F. Les lignes comme BD, BE, BF, &c. qui joignent leurs extrémitez deviennent toujours plus grandes, jusques à ce que lesdites deux lignes forment la seule droite BAH: c'est ce qui vient d'être prouvé.

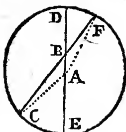
THEOREME XI.

101 *Si d'un point pris hors le centre du cercle, on mene des lignes à la circonference, je dis que celle qui passera par le centre sera la plus grande, & le reste de ce diametre sera le plus court.* Eucl. III. Prop. 7.

Soit le point B, & soient menées par ce point les lignes BE qui passe par le centre A, BC, BF, BD; je dis que BE est la plus grande

de

a *sup. n.* 57. b *sup. Ax.* 7. c *sup. n.* 12.
d *sup. n.* 12. e *sup. n.* 96.



de, & sa partie BD la plus courte de celles qui peuvent être terminées à ce point.

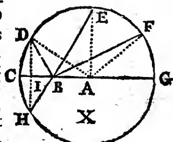
1°. $BA + AE = BA + AC$, puisque $AE = AC$. Or $AB + AC > BC$ [a]. Donc BE égal à $BA + AC$, est plus grand que BC.

2°. $AF = AB + BD$. Or $AB + BF$ est $> AF$ [b]; ôtant donc AB partie commune, le reste BF sera plus grand que le reste BD [c].

THEOREME XII.

De tous les points qui sont dans le cercle hors le centre, on ne peut mener à la circonference plus de deux lignes qui soient égales. Eucl. III. Prop. 9. 102.

Soit A le centre du cercle X, le point B ne l'est donc pas. Je dis 1°. Que BD est plus grande que BC [d]. 2°. Que BE est plus grande que BD; car AD & AE sont toujours le rayon de X, qui en tournant & s'éloignant de AB, doit faire BE plus grande que BD [e], & pareillement BF est plus grande que BE. Or BG est plus grande que BF [f]. Par conséquent dans toute la partie $CDFG$ du cercle X, toutes les lignes menées de B à la circonference de X sont toutes inégales.



Prenant l'arc CH égal à CD, puisque AC est rayon, il coupera DH perpendiculairement

a *sup.* n. 12. b *sup.* n. 12. c *sup.* Axiome 7.
d *sup.* n. 101. e *sup.* n. 100. f *sup.* n. 101.

ment *, & en deux parties égales au point *I* †; ainsi y ayant égalité de perpendicule & de son éloignement, les obliques *BH*, *BD* seront égales ⸸; mais toute autre ligne que *B H* sera ou plus petite ou plus grande, comme on vient de le voir. On peut démontrer de la même maniere que de part & d'autre de *C*, on peut mener deux lignes égales, & non davantage.

COROLLAIRE I.

103 *Il n'y a donc que le seul centre du cercle d'où l'on puisse tirer à la circonference plus de deux lignes égales.*

COROLLAIRE II.

104 *Tout point dans le cercle dont on peut tirer à la circonference trois lignes égales, est le centre du cercle.* Euclid. III. Prop. 9.

THEOREME XIII.

105 *Une ligne traversant deux cercles concentriques, soit qu'elle passe par le centre ou qu'elle n'y passe pas, les parties de chacune de ces lignes interceptées entre les deux circonferences sont égales entre elles.*

Soient *BC*, *BD* qui traversent deux cercles concentriques; je dis que *BM* $=$ *NC*, & *BF* $=$ *ED*. 1°. Pour *BC* qui passe par le centre, cela a été prouvé ‡. 2°. De *A* menant une perpendiculaire sur *B D*, alors

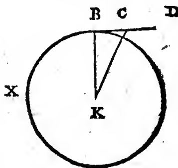
* *sup. n.* 91. † *sup. n.* 42. ⸸ *sup. n.* 58. ‡ *sup. n.* 76.

alors $GD = GB$ & $GE = GF$ [a]. Donc $GD - GE = GB - FG$ [b]. Or $GD - GE = DE$, & $GB - GF = FB$; donc $DE = BF$.

THEOREME XIV.

Une ligne perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point. Eucl. III. Prop. 16 & 18. 106

BD est perpendiculaire sur *BK*, il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle *X* qu'au point *B*.



Si on dit qu'elle le touche dans un second point, comme en *C*, je mene de *K* à *C* une ligne, laquelle n'est pas perpendiculaire sur *BD*, puisque de *K* sur *BD* on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire [c]. Elle est donc plus grande que le rayon *BK*. qui est perpendiculaire sur *BD* [d]; partant le point *C* est hors le cercle *X*: ainsi *BD* ne le touche pas en ces deux points *B* & *C*, mais seulement en *B*.

COROLLAIRE.

Il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui touche le cercle dans un même point. 107

Deux differentes lignes ne peuvent toucher le cercle *X* au même point *B* ; car par ce Théorême, elles seroient toutes deux perpendiculaires sur *BK* ; ce qui est impossible [e].

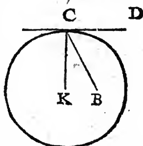
THEOREME XV.

Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui soit perpendiculaire sur le point de l'attouchement de la tan- 108

a *sup. n.* 92. b *sup. Axiome* 5. c *sup. n.* 51. d *sup. n.* 53. e *sup. n.* 49.

tangente ou touchante, cette perpendiculaire passera par le centre de ce cercle. Euclid. III. Prop. 19.

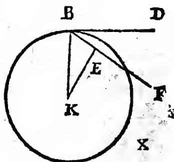
CD est une tangente ou touchante: de ce point d'attouchement, je mene au dedans du cercle une perpendiculaire: je dis qu'elle passe par le centre *K*. Si on veut que ce soit par *B* qui n'est pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raison; car de *C* ayant mené le rayon *KC*, & élevé au point *C* une perpendiculaire qui sera tangente*, mais elle sera la même que *CD*, puisqu'au point *C* il n'y peut avoir qu'une seule Tangente †: Ainsi sur la ligne *CD* au même point il y auroit deux perpendiculaires *CK* & *CB*, ce qui implique ‡.



THEOREME XVI.

109 *Entre une tangente & la circonference d'un cercle, on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infini de lignes circulaires.* Eucl. III. Prop. 16.

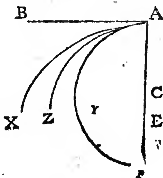
Si entre *BD* tangente & le cercle *X*, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'espace entre la tangente *BD* & le cercle, que ce soit la ligne *BF*, sur laquelle je mene du point *K* une autre ligne qui lui soit perpendiculaire, savoir *KE*, qui sera plus courte que le rayon *BK*, qui n'est



* *sup. n.* 106. † *sup. n.* 107. ‡ *sup. n.* 51.

n'eſt pas perpendiculaire ſur cette ligne *; ainſi *KE* étant plus petite que le rayon *BK*, ſon extrémité *E* eſt au dedans du cercle. Par conſéquent la ligne *BE* n'eſt pas hors du cercle, ainſi elle ne partage pas l'eſpace qui eſt entre lui & la tangente *BD*.

Mais entre la tangente *AB* & le cercle *Y*, on peut faire paſſer une infinité de cercles; car ayant prolongé le rayon *AC* au-delà du centre *C*, & de *E* comme centre, & de l'intervalle *EA* ayant fait le cercle *Z*, la ligne *AB* ſera tangente à ce cercle †, lequel étant plus grand, ſera au dehors du cercle *Y*. Pareillement le cercle *X*, dont le centre eſt *P*, ſera encore entre *AB* & *Y*, ainſi à l'infini. Par conſéquent entre la tangente *AB* & le cercle *Y* on peut faire paſſer une infinité de lignes circulaires.



COROLLAIRE.

Il eſt évident que l'eſpace compris entre la tangente & la circonference d'un cercle ſe peut donc diviſer en une infinité de parties. 110

THEOREME XVII.

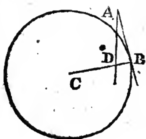
D'un point hors le cercle on ne peut mener au cercle d'un même côté plus d'une tangente. 111

Toute autre ligne le coupera, ou ne l'atteindra pas.

Soit *A* un point donné hors le cercle. La ligne *AB* le touche au point *B*. Je dis que de *A* vers *B* on ne peut point mener une autre tan-

* *ſup. n.* 51. † *ſup. n.* 106.

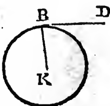
tangente, que toute autre ligne le coupera, ou ne le touchera pas. Car 1°. Si elle est au-delà de *AB*, elle ne touchera pas le cercle. 2°. Si elle passe par *B*, ce n'est pas une autre ligne que *AB*. 3°. Si elle passe au dessous de *B* par le point *D*; puisque *CB* > *CD*, le point *D* sera dans le cercle *. Donc *AD* entre dans le cercle, & le coupe.



PROBLEME II.

112 *Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.*

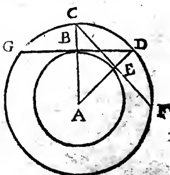
Le centre est *K*, le point donné *B*, je mene le rayon *KB*, & sur son extrémité *B* † j'éleve perpendiculairement *BD* qui sera la tangente qu'il falloit faire ‡.



PROBLEME III.

113 *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente.* Eucl. III. Prop. 17.

Le cerle est *BE*, le point donné est *C*, duquel je mene une ligne au centre *A*, & au point *B*, où cette ligne coupe le cercle, par le Problême précédent je fais la tangente *GD*. Je décris un cercle concentrique par *C*, & de *D* où ce cercle est coupé



par

* *sup. n.* 36. † *sup. n.* 47. ‡ *sup. n.* 106.

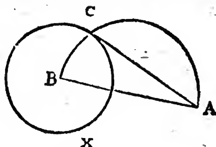
par la tangente *GD*, je prens *DF* égale à *DC*, je joins *C* & *F* par une ligne qui sera la tangente.

Par la construction, la corde *GD* = *CF*, car l'arc *GC* est égal à l'arc *CD* *, & l'arc *CD* à l'arc *DF*; ainsi les arcs *GD* & *CF* étant égaux, leurs cordes sont égales †.

Je mene de *D* au centre *A* la ligne *AD* qui sera perpendiculaire sur *CF*, puisque deux de ses points, savoir *A* & *D*, sont également éloignez de ses extrémitez : Or puisque les cordes *DG* & *CF* sont égales, les lignes *AB* & *AE* sont égales ‡. Donc le point *E* aussi bien que *B* est dans la circonference du cercle *BEB*, ainsi la ligne *CF* étant perpendiculaire sur *E*, extrémité du rayon *AE*, elle touche le cercle ‡.

A V E R T I S S E M E N T.

Ce Problême se pratique plus facilement ainsi. 114
Soit A *le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle* X. *Après avoir tiré la ligne* AB *de* A *à* B *centre du cercle* X, *il faut décrire sur cette ligne le cercle* ABC, *& au point de section* C *mener* AC *qui sera la tangente qu'on cherchoit ; ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.*



C ELE-

* *Sup. n.* 92. † *Sup. n.* 31. ‡ *Sup. n.* 94. ‡ *Sup. n.* 106.

ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.



LIVRE SECOND.

De la feconde efpece d'Etendue, qui eft la Largeur. Des Surfaces planes.

SECTION PREMIERE.

Des Angles, ou Surfaces qui font entre deux lignes, qui fe rencontrent indirectement.

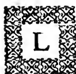
AVERTISSEMENT.

En parlant ici des Surfaces, nous ne confiderons que les planes, c'eft-à-dire celles qui font les plus courtes entre deux lignes droites, commençant par celles qui font renfermées entre deux lignes qui fe rencontrent ou qui fe coupent dans un point.

DE-

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

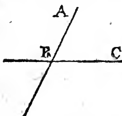


L'Angle est l'ouverture de deux lignes, qui se rencontrent indirectement. 1

Deux lignes qui se rencontrent directement, ne font qu'une même ligne.

DEFINITION II.

On appelle sommet de l'Angle, le point de rencontre des deux lignes qui le forment, comme le point B; & ces deux lignes sont appellées les côtez, ou les jambes de l'Angle. 2



Ainsi *AB* & *BC* sont les côtez ou les jambes; lorsqu'on marque un Angle avec trois lettres comme *ABC*, celle du milieu *B* marque le sommet, & les deux autres *A* & *C*, ses côtez.

DEFINITION III.

On nomme Angle plan, celui qui est fait sur un plan. 3

DEFINITION IV.

Il y a trois sortes d'Angles considerez par rap- 4



port à leurs côtez. Le rectiligne, le curviligne & le mixtiligne. Le rectiligne est celui qui est formé par la rencontre de deux lignes droites, comme C; *le curviligne est celui qui est formé par la rencontre de deux lignes courbes, comme* A; *le mixti-*

ligne est celui qui est formé par la rencontre d'une ligne droite, & d'une courbe, comme B.

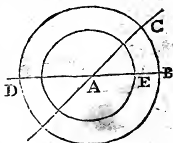
Propositions évidentes touchant les Angles.

Avertissement.

Ce sont des Corollaires de la Définition de l'Angle.

Proposition I.

5 *Il est évident par la définition de l'Angle, que sa grandeur ne dépend pas de la longueur des lignes qui le forment, mais de leur ouverture.*



Qu'on prolonge les lignes *AB*, & *AC*, ou qu'on en retranche, c'est toujours la même ouverture ; & la surface qui est à cette ouverture, c'est-à-dire la plus près du sommet *A*, n'en est augmentée, ni diminuée.

Proposition II.

6 *Un angle ne peut être augmenté, ni diminué, que lorsqu'un de ses côtez en tournant sur le sommet comme sur un centre, s'éloigne ou s'approche de l'autre côté.*

Proposition III.

7 *Un des côtez de l'angle en tournant & s'éloignant de l'autre côté, fait toujours cet angle plus grand, jusques à ce que faisant une ligne droite avec cet autre côté, il ne fait plus d'angle.*

Proposition IV.

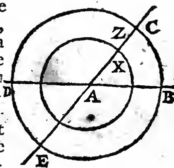
8 *Un des côtez de l'angle ne peut faire en tournant qu'un tour entier ou un cercle, après quoi il*

il se joint avec l'autre côté, & ne fait avec lui qu'une seule ligne.

PROPOSITION V.

Les arcs ou portions de differens cercles décrits par les differens points d'un des côtez de l'angle, sont d'un pareil nombre de degrez. 9

Le point *X* du côté *AB* ou *AC* décrit le cercle *XX*, & le point *Z* le cercle *ZZ*; je dis que les portions de ces deux cercles comprises entre les rayons *AB* & *AC* sont d'un égal nombre de degrez. Car puisqu'ils sont décrits en même tems, si nous divisons ce tems en 360 momens, autant que le cercle a de degrez; dans le premier moment où *Z* décrira la 360e. partie de toute sa grandeur, il est évident que *X* fera aussi une même partie du cercle qu'il décrit. Car comme dans un même tems ces deux cercles entiers s'achevent, aussi chaque partie s'acheve à proportion.



PROPOSITION VI.

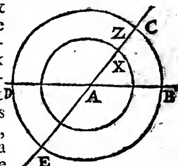
Du sommet d'un angle, comme d'un centre, ayant fait un cercle, la portion de ce cercle comprise entre les côtez de cet angle, est la mesure de cet angle. 10

PROPOSITION VII.

Le plus grand angle ne peut avoir pour sa mesure toute la demie circonference. 11

Car lorsque le côté *AC* de l'angle *BAC*, a fait en tournant la demie circonference *BCD*, que *C* est venu au point *D*, alors il ne fait plus qu'une ligne droite avec *AB*: Car puisqu'on sup-

ſuppoſe que *BCD* eſt la demie circonference, il faut que *AD* + *AB* ſoit le diametre du cercle; & qu'ainſi *AD* & *AB* ne ſoient qu'une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties égales. Toute la circonference du cercle eſt de trois cens ſoixante degrez, & par conſéquent la demie circonference de cent quatre-vingts degrez; ainſi un angle ne peut jamais être de cent quatre-vingts dégrez: car lorſque le côté *AB* eſt venu en *D*, *AC* & *AB* ne font qu'une ligne droite.



AVERTISSEMENT.

Que ſi AC *paſſe au-delà de* DA, *&* *vient en* E, *il ſe formera par ce moyen l'angle* BAE, *plus grand que* 180 *degrez, que quelques Géometres nomment Revers, & qui a pour ſa meſure l'arc* BCDE. *On ne conſidere pas ici cette ſorte d'angle, mais ſeulement celui* EAB *meſuré par l'arc* EB *complément de l'arc* BCDE *au cercle entier, ainſi qu'on le va expliquer.*

Des differentes ſortes d'Angles par rapport à leur ouverture, ou par rapport au Cercle.

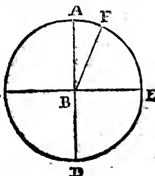
AVERTISSEMENT.

Il y a de trois ſortes d'angles, par rapport à leur ouverture ou au cercle, qui ſont, l'angle droit, l'angle aigu, & l'angle obtus.

DEFINITION I.

12 *Un angle qui a pour ſa meſure la moitié de la demie circonference, ou le quart de l'entiere circon-*

conference du cercle, c'est-à-dire un arc de quatre-vingt-dix degrez, s'appelle Angle droit.



Ainsi supposant que l'arc *AC* est le quart de la circonference *ACDE*, & par conséquent de nonante degrez, qui sont le quart de trois cens soixante degrez que vaut tout le cercle *, l'angle *ABC* qui a pour mesure cet arc *AC*, est droit.

DEFINITION II.

13 *Un angle qui a pour sa mesure un arc de plus de nonante degrez, est dit obtus.*

L'angle *FBC* est obtus, *fig. preced.* l'arc *FC* qui le mesure, étant de plus de nonante degrez, puisqu'il est plus grand que le quart du cercle *AC*.

DEFINITION III.

14 *Un angle qui a pour sa mesure un arc qui a moins de nonante degrez, est appellé aigu.*

L'angle *FBE* est aigu, ayant pour sa mesure l'arc *FE*, moindre que l'arc *AE* de nonante degrez, *même figure.* L'angle aigu peut diminuer à l'infini. Mais l'obtus ne peut augmenter que jusqu'à ce qu'il s'approche infiniment de deux angles droits.

DEFINITION IV.

15 *L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux droits, est appellé le complément de l'angle obtus au demi cercle.*

Ainsi, *figure précédente*, l'Angle *FBE* est le complément de l'angle obtus *CBF*.

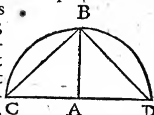
C 4 THEO-

* *L. 1. n. 27.*

THEOREME I.

16 *Une ligne perpendiculaire sur une autre ligne, fait avec elle deux angles droits; & si elle fait deux angles droits, elle est perpendiculaire.*

1°. *BA* est perpendiculaire sur *A* milieu de *CD*; d'où comme centre ayant décrit le demi cercle *CBD*, par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes *BC* & *BD* sont égales [a]; ainsi les arcs qu'elles soutiennent sont égaux [b]: & partant puisque *CBD* est la moitié de la circonference, *CD* étant le diametre du cercle, les arcs *BC* & *BD* en seront le quart; donc les angles *BAC* & *BAD* ayant chacun pour mesure le quart de cercle, ils sont droits [c].

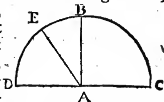


2°. Il est facile de démontrer la seconde partie; car si les deux angles *CAB* & *DAB* sont droits, les arcs *BC* & *BD* sont égaux, moitié chacun de la demie circonference [d]; mais *A* & *B* étant ainsi en égale distance de *C* & de *D*, la ligne *AB* est perpendiculaire [e].

THEOREME II.

17 *Toute ligne tombant sur une autre, forme deux angles égaux à deux droits.* Eucl. I. Prop. 13.

Soit la ligne *EA*, qui tombe sur la ligne *DC*, je dis que l'angle *DAE*, plus l'angle *EAC* valent deux droits. Car du point *A* comme centre, ayant décrit le demi cercle *DEC*, & élevé la perpendiculaire *AB*, soit que l'angle *DAE* soit droit,



a *L. 1. n. 50.* b *L. 1. n. 31.* c *sup. n. 12.*
d *sup. n. 12.* e *L. 1. n. 43.*

droit, obtus, ou aigu suivant les Définitions*, il a pour sa mesure l'arc *DE*, & l'angle *EAC* a pour la sienne l'arc *EC* †; ces deux arcs font ensemble la demie circonference du cercle égale à 180 degrez, ou à deux droits ‡.

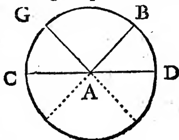
COROLLAIRE I.

Il est évident qu'une infinité de lignes tombant sur une autre ligne dans le même point, formeront des angles qui tous ensemble ne vaudront que deux droits. 18

COROLLAIRE II.

Ainsi deux ou plusieurs lignes se coupant en un point lors qu'elles sont prolongées, forment des angles qui tous ensemble ne vaudront que quatre angles droits. 19

Qu'on conçoive tant de lignes qu'on voudra, qui tombent sur *CD* au point *A*. De ce point comme centre ayant décrit un cercle, la mesure de tous ces angles sera la demie circonference *CGBD*, qui est la mesure de deux angles droits. Ayant prolongé les côtez *AB*, & *AG*, les angles qu'ils feront seront aussi égaux à deux droits: Donc tous les angles qui se peuvent faire autour de *A* sont égaux à quatre droits.

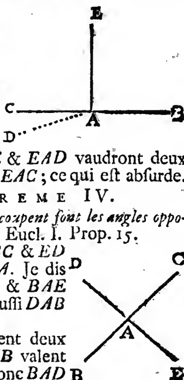


THEOREME III.

Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, faisant avec elle de part & d'autre deux angles égaux à deux droits, ces deux lignes se rencontreront directement. Euclid. I. Prop. 14. 20

* *Sup. n.* 12. 13. & 14. † *Sup. n.* 10. ‡ *Sup. n.* 12.

Les deux lignes droites AB & AC se rencontrent au point A de la ligne droite AE, & font de part & d'autre de cette ligne les deux angles EAB & EAC égaux à deux droits : il faut prouver qu'elles se rencontrent directement, c'est-à-dire qu'elles ne font ensemble qu'une seule ligne droite.



Soient $BAE + CAE$ égaux à deux droits. Si on dit que BA & AC ne font pas une seule ligne, & que BA étant prolongée va en D ; donc par le Theorême précédent les angles BAE & EAD vaudront deux droits ; donc $EAD = EAC$; ce qui est absurde.

THEOREME IV.

21 *Deux lignes qui se coupent font les angles opposez au sommet égaux.* Eucl. I. Prop. 15.

Les deux lignes BC & ED se coupent au point A. Je dis que les angles DAC & BAE sont égaux, comme aussi DAB & CAE.

BAD & DAC valent deux droits ; DAB & EAB valent aussi deux droits * ; donc $BAD + DAC = BAD + EAB$; ôtant de ces deux valeurs égales l'angle commun BAD, les restes EAD & DAC seront égaux. Par le même raisonnement, on fait voir que $BAD = EAC$.

DEFINITION IV.

22 *Le Sinus d'un arc, est la moitié de la corde du*

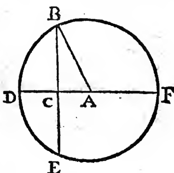
* *sup. n. 17.*

du double de cet arc, ou la perpendiculaire abaissée de l'extremité de cet arc sur le rayon.

L'arc *EB*, *Figure suivante*, est le double de l'arc *BD*; la ligne *BC*, moitié de *BE* corde de *BDE* est sinus tant de l'arc *BD* que de l'arc *BF*, son complément au demi cercle; ainsi les arcs *DE* & *BF* égaux ensemble au demi cercle ont un même sinus, & sont réciproquement complément l'un de l'autre au demi cercle.

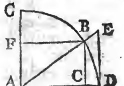
D E F I N I T I O N V.

Le sinus d'un angle est le sinus de l'arc qui le 25
mesure.



Ainsi *BC* qui est sinus de l'arc *BD*, mesure de l'angle *BAD*, est le sinus de cet angle. Lorsqu'un angle est obtus, son sinus est aussi le sinus de l'angle aigu, qui est son complément au demi cercle; ainsi *BC* est sinus de l'angle obtus *BAF* aussi-bien que de l'angle aigu *BAD*. Mais dans la suite l'on ne considere que les sinus des angles aigus, s'il n'est autrement expliqué.

BC *étant le sinus de l'angle* BAD, *on appelle* CD *compris entre* BC *&* *l'arc* BD, *le sinus verse de cet arc* BD; *donc* BC *est le sinus qu'on nomme sinus droit, ou simplement sinus*, CD *étant toujours distingué par sinus verse. La ligne* DE *qui touche l'arc* ED, *&* *qui est terminée par* AE *&* AD *qui comprennent le même arc, se nomme tangente de cet arc* *&* *de l'angle* BAD; *la ligne* AE

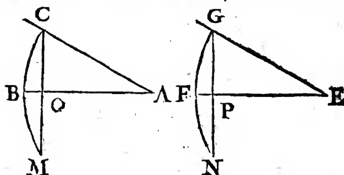


s'appelle sécante de cet angle & de cet arc. **On a** *supputé les rapports ou raisons qu'ont tous les differens sinus avec le rayon le supposant de tant de parties, par exemple de 10000. Il y a des Tables de toutes ces supputations, dont on retire de grands avantages, qui sont expliquées dans l'explication & l'usage de ces Tables.*

THEOREME V.

24 *Les angles égaux ont des sinus égaux; & si les sinus sont égaux, les angles sont égaux.*

1°. Les angles CAB & GEF sont égaux. Ainsi de leur sommet A & E, & d'un interval-



le égal, ayant fait les arcs CB, GF, qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux *. Je les continue de sorte que $CB=BM$ & $GF=FN$: donc puisque les arcs égaux ont des cordes égales †, $CM=GN$; & par conséquent CO & GP les moitiés de ces cordes sont égales; or ces moitiés sont les sinus des angles CAB & GEF, suivant la Définition ‡; donc les sinus de ces angles sont égaux.

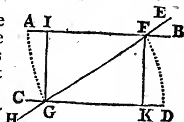
Si les sinus CO & GP sont égaux, $CM=GN$‡, & partant $CBM=GFN$; donc les angles CAB & GBF étant mesurez par les moitiés de ces arcs égaux, ils sont égaux.

THEO-

* *Sup. n.* 10. † *L.* 1. *n.* 31. ‡ *Sup. n.* 22. ‡ *Sup. n.* 22.

THEOREME VI.

Si une ligne coupe obliquement deux paralleles, elle forme huit angles, dont il y en a quatre d'alternes interieurs, & quatre exterieurs. Je dis que les alternes exterieurs, ou interieurs, sont égaux. 25
Eucl. I. Prop. 29.



Il faut prouver que $AFE = HGD$, & que $AFG = FGD$. Les deux premiers sont alternes exterieurs, & deux les autres alternes interieurs.

DEMONSTRATION.

Je mene entre les deux paralleles les perpendiculaires *FK* & *GI*, qui sont égales [a]. D'un même intervalle *GF*, & des centres *F* & *G* je fais les arcs *AG* & *DF*, mesure des angles *AFG* & *FGD*. Les sinus de ces arcs ou angles sont les perpendiculaires égales *GI* & *FK* [b]. Ces angles sont donc égaux [c], & *AFE* & *AFG* valent deux droits [d], comme *FGD* & *DGH*; ainsi $AFE + AFG = FGD + DGH$. Otant de part & d'autre les angles égaux *AFG* & *FGD*, restera $AFE = DGH$.

AUTRE DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit que *AB* tombe toujours parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle arrive à *CD*, & que le point *F* s'unisse avec le point *G*; il est clair qu'elle la couvrira parfaitement. Alors l'angle *AFE* deviendra *CGF*; mais $CGF = HGD$ [e]. Il en est de même des autres.

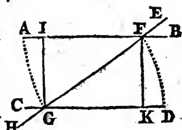
THEOREME VII.

Si une ligne joignant deux autres lignes fait les au- 26

a *L. 1. n. 65.* b *sup. n. 23.* c *sup. n. 24.*
d *sup. n. 17.* e *sup. n. 21.*

angles alternes égaux, ces deux lignes sont paralleles. Eucl. I. Prop. 27.

Si AFG & FGD (*même figure*) sont égaux, leurs sinus GI & FK sont égaux [a], GI est perpendiculaire sur AB, & FK sur CD, par la Définition des sinus [b]; partant les deux lignes AB & CD [c], sont paralleles.

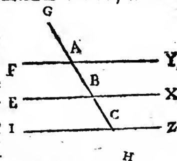


THEOREME VIII.

27 *Une ligne coupant deux ou plusieurs paralleles, tous les angles qu'elle fait avec elles d'une même part, sont égaux.*

Il faut prouver que $GAY = ABX = BCZ$, que $YAB = XBC = ZCH$, & qu'il en est de même de l'autre part, que $GAF = ABE = BCI$, & $FAB = EBC = ICH$.

1°. $ZCB = CBE$ [d], & $CBE = ABX$ [e]: Donc $ZCB = CBE = XBA$. Ainsi selon l'Axiome que deux grandeurs égales à une troisieme, sont égales, $ZCB = XBA$. On démontrera de même que $GAY = ABX$, & le reste.



THEOREME IX.

28 *Si une ligne tombant sur plusieurs autres lignes fait avec elles des angles égaux pris du même sens, ces lignes seront paralleles.* Eucl. I. Prop. 28.

$GAY + YAB$, (*fig. précéd*) valent deux droits, comme aussi $GBX + GBE$ [f]. Otant donc de ces deux touts égaux les angles GAY & GBX

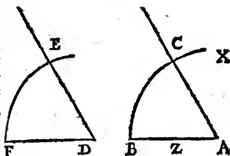
a *sup. n.* 24. b *sup. n.* 22. c *L.* 1. *n.* 71. d *sup. n.* 25. e *sup. n.* 21. f *sup. n.* 17.

GBX qu'on suppose égaux, les angles alternes *YAB* & *GBE* resteront égaux. Donc * les lignes *Y* & *X* sont paralleles. On démontrera de la même maniere que *Y* & *Z*, ou *X* & *Z* sont paralleles.

PROBLEME I.

D'un point donné sur une ligne droite, décrire un angle rectiligne égal à un angle donné. Euclid. I. Prop. 2. 29

Du point donné *A* sur la droite *Z*, il faut décrire l'angle *CAB* égal à l'angle *EDF*. Du point *D*, comme centre, je fais l'arc *EF*; après du point donné *A* comme centre, & de l'intervalle *DE*, je fais le cercle *X*, dont je prens l'arc *BC* égal à l'arc *EF*, au moyen des cordes égales *EF*, *BC* †; ensuite menant de *C* au point *A* une ligne droite, l'angle *CAB* sera celui que l'on proposoit de faire égal à *EDF*; car ils ont pour mesure des arcs égaux; ainsi ils sont égaux ‡.



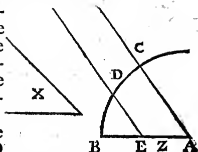
PROBLEME II.

D'un point donné hors d'une ligne mener une ligne droite sur une autre, qui fasse avec elle un angle égal à un angle donné. 30

Soit donné le point *D* duquel il faut mener une ligne droite sur *Z*, qui fasse avec elle un angle égal à *X*.

Sur *Z* dans quelque point que ce soit pris à discretion, j'éleve une ligne telle que *AC*, qui par

* *sup. n.* 26. † *L.* 1. *n* 31. ‡ *sup. n.* 10.



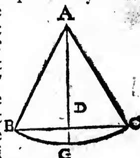
par le Problême précédent fasse l'angle *CAB* égal à l'angle donné *X*. Si cette ligne passe par le point *D*, le Problême est achevé.

Si elle n'y passe pas, je mene par *D* une ligne parallele à *CA* [a], donc *DEB* = *CAB* = *X* [b]. Ainsi *DEB* = *X*.

PROBLEME III.

31 *Couper un angle en deux parties égales.* Euclid. I. Prop. 9.

L'angle donné est *BAC*; ayant fait ses deux côtez *AB* & *AC* égaux, il faut les joindre par la ligne *BC*, sur laquelle, & du point *A* ayant mené une perpendiculaire *AG* [c], *BD* = *DC* [d]; partant concevant que l'arc *BGC* est partie d'un cercle dont *A* est le centre, *AB* & *AC* les rayons, & *BC* la corde coupée en deux également par ladite perpendiculaire *AG*, l'arc *BC* le fera aussi au point *G* [e]; ainsi l'arc *BG* sera égal à l'arc *GC*: & partant les angles *BAG*, *GAC* qu'ils mesurent [f] seront égaux. Donc l'angle *BAC* est coupé en deux également.



THEOREME X.

32 *L'angle mixte compris entre le cercle & sa tangente, est plus petit qu'aucun angle rectiligne.* Eucl. III. Prop. 16.

On ne peut mener une ligne droite entre le cer-

a *L.* 1. *n.* 72. b *sup. n.* 27. c *L.* 1. *n.* 46. d *L.* 1. *n* 42. e *L.* 1. *n.* 84. f *sup. n.* 10.

cercle & la tangente *. On ne peut donc diviser l'angle mixte que fait le cercle avec sa tangente ; ainsi cet angle est plus petit qu'aucun angle rectiligne.

AVERTISSEMENT.

C'a été une grande dispute, si l'angle étoit une quantité qui se pût diviser ; & ce qui en a fait douter, c'est la mauvaise définition qu'Euclide en donne. L'idée que nous en avons donnée en le définissant, l'ouverture des deux lignes qui se rencontrent indirectement, *renferme un espace, & par conséquent une grandeur divisible.*

SECTION II.

De la comparaison des Angles, & de leur differente position au regard d'un Cercle.

AVERTISSEMENT.

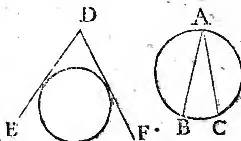
La mesure d'un angle, comme nous avons dit, est l'arc du cercle qui a pour centre le sommet dudit angle, & pour termes les côtez qui le forment. Or le sommet d'un angle peut se trouver dans un cercle au centre, ou hors le centre : dans la circonference, ou hors la circonference ; & en tous ces cas, quoique ce soit toujours le même angle, il donne lieu à differentes considerations.

DEFINITION I.

L'*Angle dont le sommet est dans la circonference du cercle, & les côtez dans le cercle, est appellé Angle à la circonference, comme* BAC. † 33

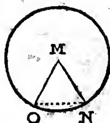
Euclide appelle Angle inscrit, celui qui est dans la circonference ; & circonscrit celui qui est hors le cercle, & dont les côtez tou-

* L. 1. n. 109. † Voy. la Fig. suiv.



touchent le cercle. *BAC* eſt un angle inſcrit, *EDF* eſt circonſcrit.

DEFINITION II.

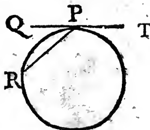


34 *L'angle au centre eſt l'angle dont le ſommet eſt au centre du cercle, & dont les côtez ſont rayons, comme* OMN.

DEFINITION III.

35 *Le ſegment d'un cercle eſt une partie de ce même cercle compriſe entre une corde*, comme dans la figure ſuivante, PR *forment un grand & un petit ſegment.*

DEFINITION IV.



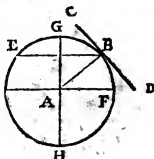
36 *L'Angle formé par une tangente & une corde ou ſécante, tirée du point d'attouchement, eſt nommé Angle du ſegment, comme* QPR *ou* RPT.

THEOREME I.

37 *L'angle du ſegment a pour meſure la moitié de l'arc qu'il comprend entre ſa corde.* Euclid. III. Prop. 32.

Soit

Soit l'angle *CBE*, formé par la tangente *CB*, & par la corde *BE*, il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *BE*.



Soit mené le diametre *GH* coupant l'arc & la corde *EB* en deux parties égales ; & soit encore tiré le diametre *AF* parallele à la corde *EB*, & le rayon *AB* passant par le point d'attouchement, il formera l'angle au centre *GAB*, qui a pour mesure l'arc *GB*. Il n'y a donc qu'à prouver que l'angle *CBE* lui est égal : ce qui est évident ; car l'angle *CBA* est droit aussi bien que l'angle *GAF* *: mais l'angle *EBA* est égal à l'angle *BAF*, parce qu'ils sont alternes †. Donc ôtant ces deux angles égaux, savoir *FAB* de *GAE* qui est droit, & *ABE* de l'angle droit *ABC*, les restes *BAG* & *CBE* seront égaux. Or *BAG* a pour mesure l'arc *BG* ; donc *CBE* qui lui est égal, a pour sa mesure un arc égal à *BG*, moitié de *BGE* ; ce qu'il falloit prouver.

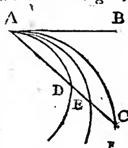
On prouvera par un semblable raisonnement, que l'autre angle *DBE* a pour sa mesure l'arc *BH*, moitié de l'arc *BHE*, compris dans ledit angle entre la tangente *BD* & la corde *BE*, en ajoutant aux angles droits *DBA*, *FAH*, les angles alternes égaux *EBA*, *BAF*, au-lieu que pour la précédente démonstration on les en a retranchez.

Corollaire.

Il est évident que si l'on fait passer entre la tangente & la corde, une infinité de portions de circonfe- 38

* *L. 1. n. 91. & 102.* † *Sup. n. 25.*

ferences de cercles, coupées par cette corde prolongée, elles seront toutes d'un égal nombre de degrez, puisqu'elles serviront de mesure à un même angle.

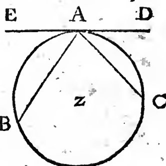


Car l'angle *BAC* ayant pour mesure la moitié de *AD*, de *AE*, de *AF*, &c. s'il étoit par exemple de dix degrez, toutes ces portions seroient chacune de vingt degrez.

THEOREME II.

39 *L'Angle à la circonference a pour mesure, la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.*

Soit l'angle *BAC*. Il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *BC*. Soit mené par le point de *A* la touchante *ED*; elle formera deux nouveaux angles *EAB*, & *DAC*, qui par le précédent Théorême auront pour mesure la moitié des arcs *AB*, *AC*; mais les trois angles qui se forment au point *A* sont égaux à deux droits *; donc ils ont pour mesure la moitié de la circonference du cercle †; donc les moitiez des arcs *AB* & *AC* étant mesures des angles *BAE* & *CAD*, la moitié du reste du cercle, c'est-à-dire la moitié de *BC*, sera la mesure de *BAC*.



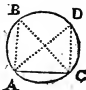
COROLLAIRE I.

40 *Il est évident que tous les angles à la circonference d'un cercle, & qui s'appuyent sur le même arc, sont égaux.* Eucl. III. Prop. 21.

Ainsi

* *Sup. n.* 18. † *Sup. n.* 12.

Ainsi les angles *ABC* & *ADC*, en quelque endroit de la circonference *ABDC* qu'ils soient, sont tous égaux; car ils ont tous pour leur mesure la moitié de l'arc *AC*, sur lequel ils sont appuyez: partant ayant une même mesure, ils sont égaux.



COROLLAIRE II.

L'Angle du centre est double de l'angle à la circonference qui s'appuye sur le même arc. Eucl. III. Prop. 20. 41



Soit l'angle *CAD* au centre, & *CBD* à la circonference; il est clair que ce premier qui a pour mesure tout l'arc *CD* est double de *CBD*, qui n'en a que la moitié.

COROLLAIRE III.

Dans des cercles égaux, les angles égaux (soit qu'ils soient ou au centre ou à la circonference,) sont appuyez sur les arcs égaux. Eucl. III. Prop. 26. 42

Si cela n'étoit pas, ces angles ayant des mesures inégales, ils seroient inégaux; & on les suppose égaux.

COROLLAIRE IV.

Dans des cercles égaux, les angles (soit au centre ou à la circonference,) qui sont appuyez sur des arcs égaux, sont égaux. Euclid. III. Prop. 27. 43

Ils ont des mesures égales; ils sont donc égaux.

COROLLAIRE V.

L'angle à la circonference dans le demi-cercle, ou qui a pour base le diametre du cercle, est droit. Eucl. III. Prop. 31. 44

Car

Car il est appuyé sur la demie circonference, dont la moitié, qui est de nonante degrez, est la mesure de l'angle droit *.

C O R O L L A I R E VI.

45 *L'angle dans le grand segment est aigu.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur un arc moindre que la demie circonference; ainsi la moitié de cet arc, qui est sa mesure, est moins de nonante degrez; partant cet angle est aigu †.

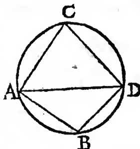
C O R O L L A I R E VII.

46 *L'angle dans le petit segment est obtus.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur un arc plus grand que la demie circonference, dont la moitié qui est la mesure, est de plus de nonante degrez: partant cet angle est obtus ⸸.

C O R O L L A I R E VIII.

47 *Les angles à la circonference étant opposez, & s'appuyant sur les mêmes points, sont égaux à deux droits.*



Soient les angles ACD, & ABD; il est clair qu'ils ont pour mesure la moitié des arcs ABD, & ACD ‡: & par conséquent la moitié de toute la circonference, qui vaut deux fois nonante degrez; ainsi ces deux angles ayant pour mesure ensemble la valeur de deux angles droits, sont égaux à deux droits.

P R O B L E M E I.

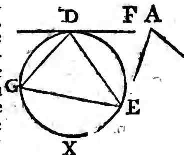
48 *Couper un segment dans le cercle, qui soit capable d'un angle donné.* Eucl. III. Prop. 34.

Soit

* *sup. n.* 12. † *sup. n.* 14. ⸸ *sup. n.* 13. ‡ *sup. n.* 39.

Soit le cercle *X* duquel il faut retrancher un ſegment capable de contenir un angle égal à l'angle donné *A*, ou ce qui eſt le même, que l'angle qui ſera appuyé ſur l'autre ſegment reſtant ſoit égal à l'angle donné *A*.

Je mene *DF* qui touche le cercle *X* [a], & ſur *DF* je mene *DE* une ſeconde ligne qui faſſe avec *DF* un angle égal à l'angle *A* [b], tout angle inſcrit dans le cercle *X* qui eſt appuyé ſur *DE*, a pour ſa meſure la moitié de l'arc *ED* [c]. Or la moitié de cet arc eſt la meſure de l'angle *EDF*, égal à *A* [d]; donc on a fait ce qui étoit propoſé; c'eſt-à-dire, que tout angle inſcrit dans le cercle *X*, dont la baſe ſera l'arc *DE*, en quelque part de la circonference du cercle que ſoit ſon ſommet, il ſera égal à l'angle *A*.



PROBLEME II.

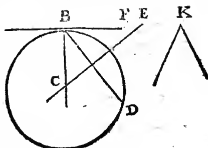
Trouver le cercle dont le ſegment terminé par 49
une ligne donnée, ſoit capable d'un angle égal à un angle donné. Euclid. III. Prop. 33.

Sur *BD* ſoit fait l'angle *FBD* égal à l'angle *K* [e], au point *B* ſoit élevée *BC* perpendiculaire ſur *BF* [f], & ſur le milieu de *BD* une autre perpendiculaire *EC*, qui coupera *BC* au point *C*; d'où ayant décrit un cercle de l'intervalle *BC* [g], on aura le cercle que l'on cherchoit; ce qu'il faut prouver.

BF perpendiculaire ſur le rayon *BC*, touche

a *L.* 1. *n.* 112. b *ſup. n.* 29. c *ſup. n.* 39. d *ſup. n.* 37. e *ſup. n.* 29. f *L.* 1. *n.* 47. g *L.* 1. *n.* 30.

che ce cercle *. L'angle *FBD* a pour sa mesure un arc égal à la moitié de l'arc *BD* †; tous les angles inscrits dans ce cercle & appuyez sur *BD* sont égaux, &

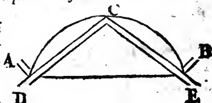


ont pour leur mesure la moitié de l'arc *BD*‡; ils sont donc égaux à l'angle *FBD*; & partant à l'angle *K*, à qui on a fait égal *FBD*.

AVERTISSEMENT.

De ce que l'on a prouvé que tous les angles appuyez sur le même arc sont égaux ‡, *on apprend le moyen de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, sans compas, ou sans avoir le centre de ce cercle, ce qui est d'une grande utilité.*

AB *est la corde d'un arc proposé, ou de la portion d'un cercle, laquelle il faut tracer. On veut que cet arc soit de dix degrez, ainsi l'angle inscrit dans cet arc, aura pour sa mesure la moitié de* 350 *degrez, ou de trois cens soixante degrez moins dix, c'est à-dire, que cet angle sera de cent soixante quinze degrez. Je dispose donc les deux règles droites* CD *&* CE, *de sorte que l'angle* DCE *soit de cent soixante-quinze degrez, & je les joins ensemble. Je plante deux clous à l'extrémité de la corde,* A *&* B, *après quoi tournant le point* C *ensorte que les deux*



* *L.* 1. *n.* 106. † *sup. n.* 37. ‡ *sup. n.* 39. ‡ *sup. n.* 40.

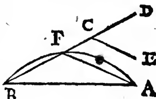
deux règles CD, & CE *rasent toujours les clous* A & B; *je décrirai la ligne circulaire* ACB, *qui sera l'arc que l'on cherchoit.*

Par ce moyen on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puisse avoir ce cercle. Cette operation est mécanique; en voici une qui est géometrique.

PROBLEME III.

50 *La corde d'un segment de cercle étant donnée avec l'angle dans ce segment, trouver les points par où passe l'arc dont la corde est donnée, sans connoitre ni chercher le centre du cercle, dont cet arc est partie.*

La corde donnée du segment qu'on veut décrire, est *AB*. Je tire la ligne *BD*, faisant quelqu'angle avec *BA*. Ensuite dans un point de cette ligne pris à discretion, je fais l'angle *ECF* égal à l'angle donné; ensuite je mene par *A* une ligne parallele à *EC*; ainsi l'angle *AFB* est égal à *ECF* *, & à l'angle donné: partant l'arc proposé, selon ce qui vient



d'être démontré, passe par *F*. Par une semblable operation, je trouve les autres points par où passe cet arc, sans qu'il soit nécessaire de chercher le centre du cercle dont cet arc fait partie.

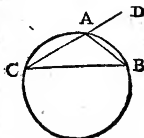
THEOREME III.

51 *L'angle dont le sommet est dans la circonference, fait par une corde & par une sécante prolongée hors le cercle, a pour sa mesure la moitié de l'arc de la corde, plus la moitié de l'arc de la sécante.*

Soit *AB* une corde, & *CD* une sécante pro-

* *sup. n. 27.*

longée hors le cercle, dont une partie est la corde de l'arc *CA*. Il faut prouver que l'angle *BAD* formé par la corde *AB*, & la sécante *CD*, a pour sa mesure la moitié de l'arc *AB*, plus la moitié de l'arc *AC*.

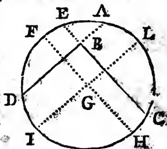


Les deux angles *CAB* & *BAD* sont ensemble égaux à deux droits [a]; ils ont donc pour leur mesure la moitié de la circonference du cercle [b]; mais l'angle *CAB* a pour sa mesure la moitié de l'arc *CB* [c]: l'angle *BAD* restant aura donc pour sa mesure les moitiez des arcs restans *CA*, *AB* qui avec l'arc *CB* font le cercle entier.

THEOREME IV.

52 *L'angle formé par la section de deux cordes qui se coupent au dedans d'un cercle, a pour sa mesure la somme des moitiez des arcs sur lesquels il s'appuye.*

Soit *B* le sommet de l'angle dans le cercle. Il faut prouver qu'il a pour sa mesure la moitié des arcs *AE* & *DC*. Si *B* étoit le centre, cela seroit évident. Que le point *G* soit le centre, je mene par *G* des paralleles aux côtez de l'angle *CBD*. Cet angle est égal à l'angle *LGH* [d], dont la mesure est l'arc *HI*. Il n'est donc question que de prouver que l'arc *HI* est la moitié des arcs *DC* & *AE*.



Les

a *sup. n.* 17. b *sup. n.* 12. c *sup. n.* 39. d *sup. n.* 27.

Les arcs HI & FL ſont égaux [a]. $DI = AL$ & $CH = EF$ [b]. Or $HI = AE + AL + EF$. Comme auſſi $HI = DC - CH$ (ou EF) $- DI$ (ou AL,) c'eſt-à-dire, $HI = DC - EF - AL$. Par conſéquent $HI + HI = AE + AL + EF + CD - EF - AL$. Or $+ AL + EF - AL - EF =$ zero. Donc $HI + HI$ (ou $2 HI$) $= AE + DC$. Par conſéquent l'arc HI eſt auſſi la moitié des arcs DC & AE, qui ſont ainſi la meſure de l'angle CBD égal à IGH, dont l'arc HI eſt la meſure.

THEOREME V.

L'angle dont le ſommet eſt hors du cercle, mais dont les côtez le traverſent, & s'appuyent ſur la circonference, a pour ſa meſure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe. 53

Soit l'angle BAC. Je dis qu'il a pour meſure la moitié de l'arc BC, moins la moitié de DF.

Je mene par D une paralle à AC [c]; ainſi l'angle BAC eſt égal à BDE [d], qui a pour ſa meſure la moitié de l'arc BE [e]. Les arcs CE & DF ſont égaux [f]. Or $BE = BC - CE$; donc $BE = BC - DF$. Donc la moitié de BE eſt égale à la moitié de $BC - DF$. Ainſi puiſque l'angle BAC a pour ſa meſure la moitié de BE; il a pour meſure la moitié de l'arc concave BC, ſur lequel il eſt appuyé, moins la moitié de l'arc convexe DF: ce qu'il falloit prouver.

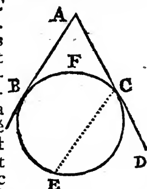
THEOREME VI.

L'angle dont les côtez touchent le cercle, a pour me 54

a ſup. n. 21. & n. 42. b L. 1. n. 86. c L. 1. n. 72. d ſup. n. 27. e ſup. n. 39. f L. 1. n. 80.

m ſure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.

Soit l'angle BAC, ſes côtez AB, AC, touchant le cercle. Il faut prouver qu'il a pour meſure la moitié de BEC moins la moitié de BEC.



Je mene par C un des points d'attouchement CE parallele à AB *, l'angle BAC eſt égal à l'angle DCE †. Or DCE a pour ſa meſure la moitié de l'arc CE ⊥, qui l'eſt auſſi de CAB : partant reſte à prouver que l'arc $BEC - BFC$ eſt égal à l'arc CE. 1°. L'arc $BEC - BE$ eſt égal à l'arc EC. 2°. Puiſque ‡ l'arc BC eſt égal à l'arc BE: donc $BEC - BFC = EC$; ce qu'il falloit prouver.

SEC-

* *L. 1. n. 72.* † *ſup. n. 27.* ⊥ *ſup. n. 37.* ‡ *L. 1. n. 86.*

SECTION III.

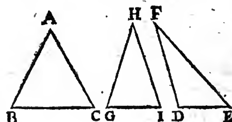
Des Triangles.

DEFINITION I.

Le triangle est une surface bornée par trois lignes. Il y en a de six especes : trois par rapport aux côtez, & trois par rapport aux angles. 55

DEFINITION II.

Le triangle qui a ses trois côtez égaux est appellé équilateral, comme ABC. 56



DEFINITION III.

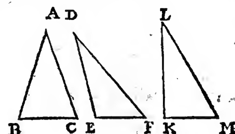
Le triangle qui a seulement deux côtez égaux est nommé Isoscele, comme HGI. fig. précéd. 57

DEFINITION IV.

Le triangle dont les côtez son inégaux est nommé Scalene, comme DEF. fig. précédente. 58

DEFINITION V.

Le triangle qui a un angle droit, est appellé Rectangle, comme LKM. 59



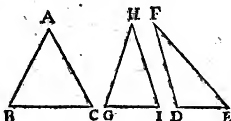
DEFINITION VI.

Le triangle qui a un angle obtus, est nommé 60

Obtusangle, ou Ambligone, comme DEF.

DEFINITION VII.

61 *Le triangle qui a tous ses angles aigus est appellé Acutangle, ou Oxygone: comme* ABC.



DEFINITION VIII.

62 *Un triangle est dit inscrit dans le cercle, lorsque le sommet de ses trois angles est dans la circonference de ce cercle, & alors ce cercle est dit Circonscrit à ce triangle.*

DEFINITION IX.

63 *Un triangle est dit circonscrit à un cercle, lorsque ses angles sont hors du cercle, & que ses côtez touchent ce cercle; & alors ce cercle est dit inscrit dans ce triangle.*

DEFINITION X.

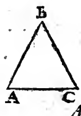
64 *Deux triangles sont dits équiangles, lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.*

DEFINITION XI.

65 *Deux triangles sont dits entierement égaux, lorsqu'étant équiangles, les côtez qui comprennent les angles de l'un sont égaux aux côtez qui comprennent les angles de l'autre, chacun à chacun.*

THEOREME I.

66 *Dans un triangle deux de ses côtez, quels qu'ils soient, *sont plus grands que le troisiéme.* Eucl. I. Prop. 20.



AB+*BC* font plus grands que *AC*: On a dit qu'entre deux points

A & *C* on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite *AC* *.

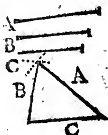
COROLLAIRE.

Ainsi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, si deux de ces lignes ne sont plus grandes que la troisieme. Eucl. I. Prop. 22. 67

PROBLEME I.

Trois lignes étant données, en former un triangle. Eucl. I. Prop. 1. & 22. 68

Soient les trois lignes données *A*,*B*,*C*. D'une des extrémitez de ces trois lignes, par exemple de *C*, je fais un arc de l'intervalle de *A*; & de l'autre extrémité, je fais un autre arc de l'intervalle de *B*; ensuite ayant mené du point où ces deux arcs se coupent, les deux lignes *A* & *B* aux extrémitez de *C*, le triangle sera fait, dont les côtez par la construction seront égaux aux lignes données.



PROBLEME II.

Sur une ligne donnée décrire un triangle équilateral. 69

Soit la ligne donnée *AB*. Il faut de l'ouverture de cette ligne, & de ses extrémitez *A* & *B* comme centres, décrire deux arcs; du point où ils se couperont, menant des lignes par *A* & par *B*, on aura un triangle équilateral.



PROBLEME III.

Circonscrire un cercle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 5. 70

 C'est

* L. 1. n. 12.

C'eſt la même choſe que de faire paſſer un cercle par trois points donnez *.

COROLLAIRE

71 *Il eſt évident que pour trouver un point également éloigné de trois points donnez, qui ne ſont pas ſur une même ligne, il faut décrire par ces trois points un cercle; le centre de ce cercle ſera le point qu'on cherche.*

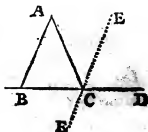
DEFINITION XII.

72 *L'on appelle angle extérieur de tout triangle, l'angle formé par le prolongement d'un des côtez.*

Dans le triangle *BAC*, *figure ſuivante*, ayant prolongé *BC* en *D*, l'angle *ACD* eſt nommé l'angle extérieur, conſideré comme oppoſé aux deux intérieurs *CAB* & *ABC*.

THEOREME II.

73 *L'angle extérieur d'un triangle eſt égal aux deux intérieurs oppoſez.* Eucl. I. Prop. 32.



Je mene *CE* parallelement à *AB*, & je partage ainſi l'angle extérieur *ACD* en deux angles *ACE* & *ECD*, qu'il faut prouver égaux aux deux intérieurs oppoſez, ce qui eſt évident; car *ABC* = *ECD* †, & *BAC* = *ACE* ‡.

COROLLAIRE.

74 *Donc l'angle extérieur eſt plus grand qu'aucun des intérieurs oppoſez.* Eucl. I. Prop. 16.

Il faut bien que cela ſoit, puiſque cet angle extérieur eſt égal aux deux intérieurs oppoſez, ainſi qu'on vient de le démontrer.

THEOREME III.

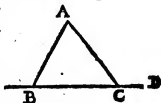
75 *Les trois angles d'un triangle ſont enſemble égaux*

* *L. 1. n. 87.* † *ſup. n. 27.* ‡ *ſup. n. 29.*

égaux à deux angles droits. Eucl. I. Prop. 32.

Pour le démontrer, je circonscris un cercle au triangle donné [a]. Ses trois angles ont pour mesure la moitié des arcs qui les soutiennent [b]; ainsi ils ont pour mesure la moitié de la circonference du cercle, c'est-à-dire 180 degrez, valeur de deux angles droits [c].

AUTRE DEMONSTRATION.



Les deux angles *ACB* & *ACD* valent deux angles droits [d]; mais *ACD* angle extérieur, est égal aux deux opposez intérieurs *ABC* & *CAB* [e]; donc ces deux angles avec *ABC* sont égaux à deux angles droits.

COROLLAIRE I.

Donc connoissant les deux angles d'un triangle, on connoit le troisieme. 76

Car les trois valent 180 degrez: si deux valent 160, le troisieme doit valoir 20.

COROLLAIRE II.

Les trois angles d'un triangle peuvent être aigus. 77

Car on peut partager cent quatre-vingt degrez, valeur des trois angles d'un triangle, en trois parties, dont chacune sera moindre que la valeur d'un angle obtus ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que cent quatre-vingt degrez, valeur de deux angles droits.

COROLLAIRE III.

Dans un triangle il ne peut y avoir plus d'un angle droit, ni plus d'un obtus. 78

Si deux des angles étoient droits, les trois ensemble vaudroient plus de deux droits. Si

a *sup. n.* 7. b *sup. n.* 39. c *sup. n.* 12.
d *sup. n.* 17. e *sup. n.* 73.

deux étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois ensemble vaudroient aussi davantage que deux droits ; ce qui est contre le Théorême précédent.

COROLLAIRE IV.

79 *Deux angles d'un triangle sont donc nécessairement aigus, ou plus petits que deux droits.* Eucl. I. Prop. 17.

Cela est évident, puisqu'un triangle ne peut avoir deux de ses angles, ni droits, ni obtus.

COROLLAIRE V.

80 *Si dans deux triangles, deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, ils sont équiangles, c'est-à-dire que le troisieme angle de l'un est égal au troisieme angle de l'autre.*

Car les trois angles de chacun de ces triangles sont égaux à deux droits ; ainsi puisque de deux touts égaux, ôtant des parties égales, les restes sont égaux, il faut qu'après avoir ôté de chaque triangle les deux premiers angles de l'un, égaux aux deux premiers de l'autre, le troisieme angle de l'un qui reste, soit égal au troisieme angle de l'autre.

COROLLAIRE VI.

81 *Si un triangle a un de ses angles plus grand que celui d'un autre triangle, les deux autres ensemble seront plus petits que les deux autres de celui-là.*

Car ôtant de la valeur de deux droits une plus grande partie, ce qui reste doit être plus petit, que lorsqu'on ôte moins.

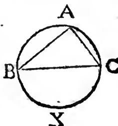
THEOREME IV.

82 *Le triangle scalene à ses trois angles inégaux.*

Soit *ABC* un triangle scalene: Je lui circonscris le cercle *X* * : puisque les trois côtez *AB*, *AC*,

* *Sup. n.* 70.

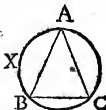
A,C, *BC* font inégaux, les trois arcs dont ils font les cordes font inégaux *, par conféquent les trois angles du triangle *ABC*, qui ont pour mefure la moitié de ces arcs †, font inégaux.



THEOREME V.

Dans le triangle ifofcele, les angles fur la bafe font égaux; & fi les angles fur la bafe font égaux, le triangle eft ifofcele. Eucl. I. Prop. 5. 83

Soit *ABC* un triangle ifofcele. Je lui circonfcris le cercle *X*: puifque *AB*=*AC*, les arcs que ces côtez foutiennent font égaux. Or la moitié de ces arcs égaux eft la mefure des angles *ABC* & *ACB* ‡; donc ces angles font égaux.



L'autre partie de cette Propofition eft facile. Car fi les deux angles *ABC* & *ACB* font égaux, les arcs *AB* & *AC*, ou leurs cordes font égales; ainfi le triangle *ABC* eft ifofcele.

COROLLAIRE I.

Aucun des angles de la bafe d'un ifofcele ne peut être droit ni obtus. 84

Car fi l'ùn étoit droit, l'autre le feroit auffi: ainfi fes trois angles vaudroient plus que deux droits; ce qui ne peut être ‡. Et fi l'un étoit obtus, l'autre le feroit; ainfi deux feuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits: ce qui eft encore plus impoffible.

COROLLAIRE II.

Si deux triangles ifofceles ont l'angle de leur fommet égal, ou un des deux de leur bafe, ils les ont tous. 85

D 6 Car

* *L. 1. n. 32.* † *fup. n. 39.* ‡ *fup. n. 39.* ‡ *fup. n. 75.*

Car 1°. Si cet angle égal est sur la base, ils auront le second angle de la base égal, partant le troisieme [a].

2°. Si c'est l'angle du sommet, la valeur des deux angles sur la base de chaque triangle sera la même; or chacun sera la moitié de cette même somme, ainsi ils seront égaux.

THEOREME VI.

86 *Les trois angles d'un triangle équilateral sont égaux.*

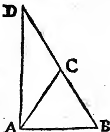
Ayant décrit un cercle à l'entour du triangle équilateral, les arcs dont les côtez de ce triangle sont les cordes, sont par conséquent égaux [b], & leurs moitiez égales. Or ces moitiez sont la mesure des angles du triangle [c]. Donc tous ces angles sont égaux.

COROLLAIRE.

87 *Ainsi chaque angle d'un triangle équilateral est aigu, & toujours de soixante degrez.*

AVERTISSEMENT.

88 *De ce Corollaire on tire un moyen d'élever autrement qu'il a été enseigné, une perpendiculaire sur le point donné d'une ligne, par exemple, sur le point* A *de la ligne* AB. *Je fais le triangle équilateral* ABC, *ensuite je prolonge* BC *jusqu'en* D, *de sorte que* CD + CB; *je mene une ligne droite de* D *à* A, *qui sera perpendiculaire, si l'angle* BAD *est droit. Or je démontre qu'il l'est: car l'angle* ACB *est égal aux deux opposez* D & A [d] *qui sont égaux* [e], *puisque* CD=CA; *ainsi* ACB *étant de* 60 *degrez*, DAC *est de* 30, CAB *est de* 60; *par-*



a *sup. n.* 80. b *L.* 1. 31. c *sup. n.* 39.
d *sup. n.* 73. e *sup. n.* 83.

partant l'angle BAD *est de* 60 + 30 *ou de* 90 *degrez, valeur de l'angle droit.*

THEOREME VII.

Dans un triangle, le plus grand côté soutient le 89
plus grand angle, & le plus grand angle est soutenu par le plus grand côté. Eucl. I. Prop. 18. & 19.

Ayant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle soutient le plus grand arc *. Or † la moitié de cet arc mesure l'angle opposé à ce plus grand côté; donc cet angle qui est mesuré par la moitié du plus grand arc, est le plus grand.

Dans un triangle inscrit dans un cercle, le plus grand angle est mesuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc a la plus grande corde ⸸; ainsi le côté opposé à cet angle est le plus grand.

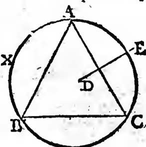
THEOREME VIII.

Dans un triangle, si deux de ses angles sont 90
égaux, les côtez opposez à ces angles sont égaux. Eucl. I. Prop. 6.

Ayant inscrit ce triangle dans un cercle, ces angles égaux seront soutenus par des arcs égaux, qui ont des cordes égales, côtez opposez à ces angles.

THEOREME IX.

Dans un triangle, la moitié de chaque côté est 91
le sinus de l'angle opposé.

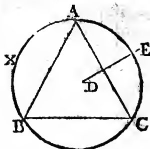


Le triangle *ABC* soit inscrit dans le cercle *X*, il faut démontrer que *AD*, moitié de *AC*, est le sinus de l'angle *ABC*.

L'arc *AE*, moitié de l'arc *AC*, est la mesure de l'angle *ABC* ‡; ainsi

 l'arc

* *L. 1. n. 32.* † *sup. n. 39.* ⸸ *L. 1. n. 32.* ‡ *sup. n. 39.*



l'arc *AC* eſt double de l'arc, qui eſt la meſure de l'angle *ABC*: Donc *AD* moitié de la corde de l'arc *AC*, eſt le ſinus de l'arc *AE* *, & celui de l'angle *ABC*.

On démontre par la même voye que la moitié de *BA* eſt le ſinus de l'angle *ACB*, & la moitié de *BC* celui de *BAC*.

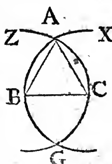
AVERTISSEMENT.

Donc le ſinus d'un angle eſt au côté oppoſé à cet angle, comme le ſinus d'un autre angle eſt à ſon côté oppoſé, ou les ſinus des angles ſont entre eux comme les côtez oppoſez, puiſque les moitiez ſont comme les touts.

THEOREME X.

92 *Deux triangles dont les côtez ſont égaux, ſont équiangles, & entierement égaux.*

Les triangles *ABC* & *DEF* ont leurs côtez égaux. Je dis qu'ils ſont équiangles & entierement égaux: ou ce qui eſt la même choſe, qu'étant poſez l'un ſur l'autre, ils conviennent.





1°. *BC* étant égal à *DE*, il eſt clair que la ligne *DE* étant poſée ſur *BC*, elles conviendront enſemble. Si on dit que *DF* ne conviendra pas avec *AB*, ni *FE* avec *AC*, je démontre le contraire. De *B* comme centre & de l'intervalle *AB* ou *DF*, lignes égales, je décris le cer-

* *ſup. n.* 22. & 23.

cercle *Z*; & de *C* & de l'intervalle *AC* ou *EF*, qui sont égales, le cercle *X*; ces deux cercles se coupent nécessairement au point *A*.

2°. Il est évident que *D* étant posé sur *B*, le point *F* se trouvera nécessairement dans le cercle *Z*, & que *E* étant posé sur *C*, le point *F* se trouvera dans le cercle *X*: le point *F* se trouvera donc dans *Z* & *X*, partant dans le point *A* où ces deux cercles se coupent; ainsi ces deux triangles posez l'un sur l'autre conviendront en tout, & seront égaux: ce qu'il falloit démontrer.

On pourroit dire que ces deux cercles *Z* & *X* se coupent ailleurs qu'en *A*: il est vrai; mais par ce qui a été démontré, ce ne peut être qu'en deux points *, & ce second point est nécessairement au-dessous de *BC*; savoir au point *G*, comme il est évident; ainsi s'ils se coupoient au-dessus de *BC* en un autre point qu'en *A*, ils se couperoient en trois; ce qui ne peut être †.

COROLLAIRE I.

Si des extrémitez d'une ligne droite on mene deux autres lignes droites qui se rencontrent en un point, on ne pourra des mêmes extrémitez, & de même part, mener deux autres lignes droites égales aux deux premieres chacune à la sienne, qui se rencontrent en un autre point. Euclid. I. Prop. 7. 93

Car cela fait deux triangles dont les côtez sont égaux, qui par conséquent étant équiangles doivent convenir.

COROLLAIRE II.

Deux triangles qui ont chacun deux côtez égaux aux deux côtez de l'autre, & la base égale à la base, les angles compris entre les côtez égaux, sont égaux. Eucl. I. Prop. 8. 94

Ces

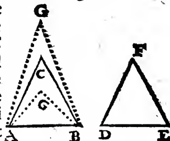
* *L.* 1. *n.* 89. † *L.* 1. *n.* 88.

Ces deux triangles ayant leurs côtez égaux, ſont entierement équiangles.

THEOREME XI.

95 *Deux triangles équiangles, qui ont un côté égal, ſont entierement égaux.*

ABC & *DEF* ſont équiangles, & $AB = DE$; je dis qu'ils ſont entierement égaux, car ſi on les poſe l'un ſur l'autre, *D* conviendra avec *AB*, puiſque ce ſont deux lignes égales. Si *DF* ne convient pas avec *AC*, mais avec *AG*: comme les angles *FDE* & *CAB* ſont égaux, il s'enſuivra que l'angle $CAB = GAB$ qui ſera le même que *FDE*; ce qui ne pouvant être, il faut reconnoitre que *DF* conviendra avec *AC*, & par la même raiſon *FE* avec *BC*, ainſi le point *F* avec *C*, & par conſéquent ces deux triangles ſont en tout égaux.



COROLLAIRE.

96 *Deux triangles qui ont deux angles égaux & un côté égal, ſont entierement égaux.* Eucl. I. Prop. 26.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux, ſont entierement équiangles *. Par conſéquent s'ils ont un côté égal, il faut ſelon ce Théorême, qu'ils ſoient entierement égaux.

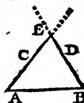
PROBLEME IV.

97 *Faire un triangle dont on a un côté, & les deux angles ſur ce côté.*

Le côté donné eſt *AB*. L'angle au point *A* ſoit nommé *X*, & celui qui doit être ſur *B* ſoit *Z*. J'éleve ſur *A* la ligne *AC* qui faſſe l'angle *CAB* égal à *X* †, & ſur *B* la ligne *BD* qui faſſe l'angle *ABD* égal à *Z*. Ces deux lignes ſe coupe-

* *ſup. n.* 80. † *ſup. n.* 29.

peront, si X & Z ne sont ni droits ni ensemble plus grands que deux droits; car s'ils l'étoient, le Problême seroit impossible *, & ces deux lignes ne se couperoient point mais seroient paralleles †, ou iroient en s'écartant, & il

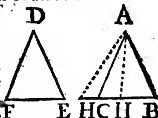


faut qu'elles concourent pour former un triangle tel que ABE qui est celui qu'on proposoit de faire. Car 1°. ayant deux angles égaux, il lui est équiangle ⊥, & ayant un côté égal, ils sont entierement égaux par le Corollaire précédent.

THEOREME XII.

Deux triangles qui ont un angle égal, & les deux côtez qui comprennent cet angle, égaux, sont en tout égaux. Eucl. I. Prop. 4. 98

L'angle $BAC = EDF$, & $AB = DE$, & $AC = DF$; je dis que ces deux triangles conviendront étant posez l'un sur l'autre: car DE conviendra avec AB; si DF ne convenoit pas avec AC, mais avec AH, l'angle BAC seroit égal à l'angle BAH; ce qui ne peut être: ainsi DF convient avec AC, & le point F avec C, par conséquent $BC = EF$; ainsi ces deux triangles qui ont leurs côtez égaux, sont équiangles ‡, c'est-à-dire, égaux en toutes choses.



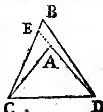
THEOREME XIII.

Deux triangles ayant une même base, l'angle du sommet de celui qui est compris, est plus grand que l'angle du sommet du triangle qui le comprend. Eucl. I. Prop. 21. 99

Les deux triangles CAD & CBD, ont CD pour

* *sup. n. 79.* † *L. 1. n. 68.* ⊥ *sup. n. 80.* ‡ *sup. n. 92.*

pour baſe. *CAD* eſt renfermé dans *CBD*. Il faut prouver que $A > B$.

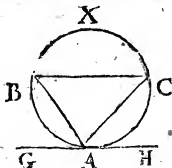


Je prolonge *DA* juſques en *E*. L'angle extérieur *CAD* eſt égal aux oppoſez intérieurs *AEC*, *ECA* *; ainſi il eſt plus grand que chacun d'eux. Par même raiſon *CED* = *EBD*, *BDE*; ainſi il eſt auſſi plus grand qu'aucun d'eux. *CAD* par conſéquent étant > que *CED*, il eſt > que *CBD*; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME V.

100 *Dans le cercle inſcrire un triangle équiangle à un triangle donné.* Eucl. IV. Prop. 2.

Soit le triangle donné *FED*. Il faut l'inſcrire dans le cercle *BAC*. Je tire la tangente *GH* †; je fais l'angle *GAB* égal à *FDE*, & *CAH* égal





à *DFE* ⸸, j'acheve le triangle *ABC* en tirant la ligne *BC*.

Puiſque l'angle *BAG*, dont la meſure eſt la moitié de l'arc *BA* ‡, qui eſt auſſi la meſure de l'angle *BCA*, eſt égal à *FDE*, donc *BCA* = *FDE*.

Par la même raiſon, *CAH* égal à *DFE*, ayant pour ſa meſure la moitié de l'arc *AC*, meſure de *CBA*, il faut que *CBA* & *DFE* ſoient égaux:

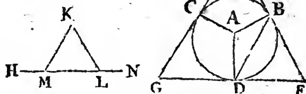
* *ſup. n.* 73. † *L.* 1. *n.* 112. ⸸ *ſup. n.* 29. ‡ *ſup. n.* 37.

égaux : ainsi ces deux triangles *ABC* & *EFD*, ayant deux angles égaux, ils sont entierement équiangles [a] : ayant donc inscrit ce triangle *ABC*, on aura fait ce qui étoit proposé.

PROBLEME VI. 102

A l'entour du cercle décrire un triangle équiangle à un triangle donné, ou circonscrire au cercle un triangle équiangle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 3.

Le triangle donné est *KLM*, & le cercle est *X*. Ayant tiré le rayon *AD*, je fais [b] d'une part l'angle $BAD = NLK$, & de l'autre $DAC = KMH$; ensuite ayant mené par les trois points *B*, *D*, *C*, les tangentes *EF*, *FG*, & *GE* [c] : je dis que le triangle *EFG* sera équiangle à *LKM*.



Les six angles des deux triangles *BAD* & *BED* valent quatre angles droits [d] ; *AB* & *AD* étant perpendiculaires, $EBD + ABD$ vaut un droit, $EDB + BDA$ vaut encore un droit. Donc $BED + BAD$ vaut deux droits. Or par la construction $BAD = KLN$, cet angle $KLN + KLM$ vaut deux droits. Donc $BED = KLM$. Par la même voye on démontre que $DGC = KML$, & par conséquent que $EFG = LKM$, & qu'ainsi les triangles *EFG* & *LKM* sont équiangles [e].

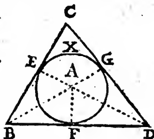
PRO-

a *sup.* n. 80. b *sup.* n. 29. c *L.* I. n. 121.
d *sup.* n. 75. e *sup.* n. 80.

PROBLEME VII.

102 *Décrire un cercle dans un triangle.* Eucl. IV. Prop. 4.

Je coupe, comme on l'a enseigné *, les angles *CBD* & *CDB* en deux parties égales par les lignes *BA* & *DA*: & du point *A* où ces deux lignes se coupent, je mene † les perpendiculaires *AE*, *AF*, *AG* sur les côtez du triangle ; ensuite de *A*, & de l'intervalle de l'une de ces lignes, je décris le cercle *X*, qui se trouvera inscrit dans le triangle *BCD*: pour le prouver il faut faire voir, que les trois lignes *AE*, *AF*, *AG* sont égales.



Les deux triangles *AEB* & *AFB* sont rectangles par la construction, puisque *AE* & *AF* ont été faites perpendiculaires. Les angles *EBA* & *ABF* sont égaux par la construction: ainsi ces deux triangles ayant deux angles égaux sont équiangles ⸸. Ils ont le côté *AB* commun. Donc ils sont entierement égaux ‡. Ainsi *AE* = *AF*: par la même voye on démontrera que *AG* est égal à *AF* & à *AE*: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

103 *Trois lignes étant données, qui font un triangle, si elles sont prolongées, on peut trouver un point qui en soit également éloigné.*

Le triangle fait, il y faut inscrire un cercle, dont le centre sera le point qu'on cherche.

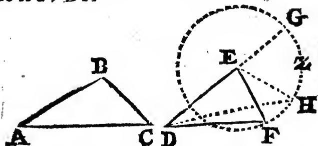
THEOREME XIV.

104 *Deux triangles qui ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au sien, lesquels contiennent des angles in-*

* *sup. n.* 31. † *L.* 1. *n.* 46. ⸸ *sup. n.* 10. ‡ *sup. n.* 96.

inégaux, celui qui a le plus grand angle aura aussi la base plus grande, & réciproquement celui qui a la plus grande base, aura le plus grand angle. Euclide 1. Prop. 24 & 25.

Soient deux triangles *ABC*, *DEF*. Si *AB* $= DE$, & $BC = EF$, & l'angle $B > E$; je dis la base $AC > DF$.



1°. Car si on conçoit le triangle *ABC* posé sur le triangle *DEF*, en sorte que les points *A* & *B* conviennent avec *D* & *E*: Comme l'angle *ABC* a été posé plus grand que l'angle *DEF*, le côté *BC* ne conviendra pas avec *EF*, mais sera plus proche de *EG* comme en *EH*, & la ligne *DH* sera égale à *AC* *. Considerant donc la ligne *EF* $= EH$ comme tournant circulairement sur *E*, extrémité de *DE*, en s'approchant par l'autre extrémité *EG* au point *H*, la ligne *DH* qui en joint les autres extrémitez sera plus grande que *DF*†: ce qu'il falloit premierement démontrer.

2°. On démontrera en la même maniere l'inverse, si on pose la ligne *AC* ou $DH > DF$, que l'angle $DEH = ABC$ sera plus grand que l'angle *DEF*, si on considere que la ligne *EH* est plus approchée de *EG* que *EF*, ayant tourné circulairement sur le point *E* en la maniere expliquée ‡.

SEC-

* *Sup. n. 98.* † *L. 1. n. 100.* ‡ *L. 1. n. 100.*

SECTION IV.

Des Figures de plusieurs côtez.

DEFINITION I.

105 LES *figures Quadrilateres, ou de quatre côtez, reçoivent differens noms.* 1°. *Si les côtez opposez sont paralleles, c'est un* Parallelogramme. 2°. *Si les quatre côtez sont égaux & tous les angles droits, c'est un* Quarré, *comme* A.



A

3°. *Si les quatre côtez sont égaux, & les angles opposez aussi égaux, mais non droits, c'est un* Rhombe *ou* Losange, *comme* B.



B

4°. *Si tous les côtez ne sont pas égaux, mais tous les angles droits, c'est un* Quarré long, oblong, Parallelogramme rectangle, *ou simplement.* Rectangle, *comme* C.



C

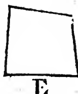
5°. *Si seulement les côtez opposez sont égaux, & les angles opposez aussi égaux, mais non droits, cette figure est* Rhomboïde, *comme* D.



D

6°.

6°. *Tout autre quadrilatere, dont les côtez opposez ne sont ni paralleles ni égaux, s'appelle un* Trapeze, *comme* E.



DEFINITION II.

Une figure est dite réguliere, lorsque tous ses 106
côtez & tous ses angles sont égaux.

DEFINITION III.

Une figure de plusieurs côtez se nomme générale- 107
ment Polygone. *Elle prend le nom qui lui est propre, du nombre de ses côtez, ou du nombre de ses angles qui comprennent ses côtez. Ainsi une figure de cinq côtez est nommée* Pentagone; *de six*, Exagone; *de sept*, Eptagone, Octogone, Enneagone, Decagone, Endecagone, Dodecagone; *ainsi de suite.*

DEFINITION IV.

Une figure réguliere est dite inscrite dans un cer- 108
cle, lorsque tous ses angles sont dans la circonference du cercle; mais elle est dite circonscrite, lorsque tous ses côtez touchent la circonference du cercle.

DEFINITION V.

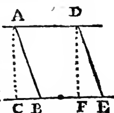
Ayant mené deux lignes des extrémitez d'un des 109
côtez d'une figure réguliere inscrite dans un cercle ou circonscrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font est appellé Angle du centre; & les angles que font ses côtez pris deux à deux, sont nommez Angles de la figure.

LEMME I.

Les lignes obliques qui font des angles égaux 110
entre les mêmes paralleles, sont égales.

Soient menées les perpendiculaires *AC* & *DF* entre les paralleles *Z* & *X*, elles seront égales *; mais

* *E. 1. n. 65.*



mais les angles ACB & DFE étant droits, & les angles ABC & DEF égaux par l'hypothese, les deux triangles ABC & DEF sont donc équiangles [a] : partant AC égal à DF, ils seront tous égaux [b]; & par conséquent $AB = DE$: ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

111 *Les lignes qui font sur une même ligne, mêmes angles, sont paralleles.*

Les lignes AB & DE font sur Z & X (*même figure ci-dessus*) les mêmes angles; ainsi $ABC = DEF$: par conséquent AB & DE doivent être paralleles [c].

LEMME III.

112 *Deux lignes qui joignent deux lignes égales & paralleles, sont égales.* Eucl. I. Prop. 33.

Si AD & BE *fig. précéd.* joignent les deux lignes AB & DE égales & paralleles, je dis qu'elles sont aussi égales. Les perpendiculaires AC & DF sont paralleles [d], & AB & DE étant paralleles, les angles ABC & DEF sont égaux [e]. Or ACB & DFE sont droits; ainsi ces deux triangles ABC & DEF étant équiangles [f] & ayant un côté égal, puisque $AB = DE$, ils sont entierement égaux [g]; partant $BC = EF$; donc $CF = BE$. Or AD & CF sont entre les paralleles AC & DF, elles sont égales [h]. Donc $BE = CF = AD$; ainsi $BE = AD$.

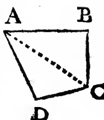
THEOREME I.

113 *Les quatre angles d'un quadrilatere sont égaux à quatre droits.*

Soit le quadrilatere $ABCB$. Il faut prouver que

a *sup. n.* 80. b *sup. n.* 96. c *sup. n.* 28. d *L.* I. *n.* 68.
e *sup. n.* 27. f *sup. n.* 80. g *sup. n.* 95. h *L.* I. *n.* 65.

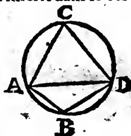
que ses quatre angles valent quatre angles droits. Ayant mené la ligne *AC* d'un des angles, à l'angle opposé, & partagé cette figure dans les deux triangles *ABC* & *ACD*, les angles de chacun desquels valent deux droits *. Ainsi tous les angles de *ABCD* valent quatre droits.



THEOREME II.

Les angles opposez d'un quadrilatere inscrit dans un cercle, valent deux angles droits. Eucl. III. Prop. 22. 114

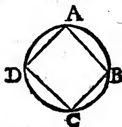
Le quadrilatere *ABCD* est inscrit dans le cercle. Les deux angles opposez *ACD* & *ABD*, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc sur lequel ils sont appuyez †. Or étant appuyez ensemble sur toute la circonference, ils ont donc pour mesure la moitié de toute la circonference: donc ils valent deux angles droits ‡. Il en est de même pour les deux autres angles *BAC* & *BDC*.



COROLLAIRE.

Si les angles opposez d'un quadrilatere ne valent pas deux droits, on ne le peut inscrire dans un cercle. 115

Car si on le pouvoit, les angles opposez de ce quadrilatere seroient égaux à deux droits par ce Théorême. Ils ne le seroient pas par la supposition; ce qui est impossible.

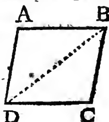


E THEO-

* *sup. n.* 75. † *sup. n.* 39. ‡ *sup. n.* 47.

THEOREME III.

116 *Si les côtez oppoſez du quadrilatere ſont égaux, ils ſont paralleles.*



$AB = CD$ & $BC = AD$, le côté BD eſt commun; donc ces deux triangles ABD & BCD étant égaux, ſont équiangles [a]. Donc l'angle $ABD = BDC$, partant AB eſt parallele à DC [b]. De même BC ſera parallele à AD, puiſque l'angle ADB eſt égal à DBC.

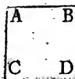
THEOREME IV.

117 *Si deux des côtez oppoſez d'un quadrilatere ſont égaux & paralleles, les deux autres ſont auſſi égaux & paralleles.* Eucl. I. Prop. 23.

Ils ſont égaux [c]; ils ſont paralleles [d].

THEOREME V.

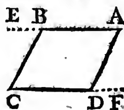
118 *Si les quatre angles du quadrilatere ſont droits, c'eſt un Parallelogramme.*



Car AB & CD, par l'hypotheſe, ſont perpendiculaires ſur AC; partant [e] ils ſont paralleles. AC & BD ſont auſſi perpendiculaires ſur DC; par conſéquent par la même raiſon ces lignes ſont paralleles.

THEOREME VI.

119 *Les angles oppoſez d'un Parallelogramme ſont égaux, & ceux qui ſont proches valent deux droits.*



1°. L'angle $FDA = DCB$ [f], & $FDA = DAB$ [g]; partant puiſque deux angles égaux à un troiſieme, ſont egaux, $DAB = BCD$: Or $FDA + ADC$ valent deux angles droits [h]. Donc

BCD

a *ſup. n.* [illegible]4. b *ſup. n.* 26. c *ſup. n.* 114. d *ſup. n.* 116
e *L.* 1 *n* 68. f *ſu. n.* 27. g *ſup. n.* 25. h *ſup. n.* 17.

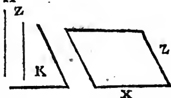
BCD égal à *ADF*, vaut avec *ADC* deux droits.

2°. On démontre de même que les deux angles opposez *ABC* & *ADC* sont égaux, & que *BAD* + *ABC* valent deux droits ; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME I.

Faire un Parallelogramme dont on a un angle, & les deux côtez qui le comprennent. 120

Les côtez donnez sont Z & *X*, l'angle donné *K* : il faut joindre *Z* & *X*, de sorte qu'ils fassent un angle égal à *K* *, & ensuite tirer deux lignes paralleles à Z & à *X* †.



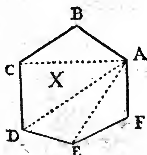
COROLLAIRE.

Donc pour faire un quarré dont on a un côté, il n'est question que de joindre deux lignes égales à celle qui est donnée, de sorte qu'elles fassent un angle droit. Eucl. I. Prop. 46. 121

THEOREME VII.

Toute figure polygone ou de plusieurs côtez, se réduit en autant de triangles qu'elles a de côtez, moins deux. 122

Dans la figure Polygone *X*, ayant tiré d'un de ses angles *A*, à tous les autres angles, des lignes droites, on fait plusieurs triangles qui ont pour base les côtez de ce Polygone, à la réserve de deux qui sont aux deux côtez de *A*, dont *AB* & *AF* sont un des côtez. Ainsi il y a autant de triangles, qu'il y a de côtez moins deux.



* *Sup. n. 29.* † *L. 1. n. 72.*

deux. La même chose se trouve dans tous les Polygones; c'est pourquoi on peut dire absolument qu'un Polygone se peut réduire en autant de triangles qu'il a de côtez, moins deux.

COROLLAIRE.

123 *Donc tous les angles d'une figure de plusieurs côtez sont égaux à deux fois autant d'angles droits, qu'elle a de côtez moins quatre.*

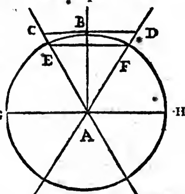
C'est-à-dire, que tous les angles de *X* qui a six côtez, sont égaux à huit angles droits. Car ce Polygone se réduit en autant de triangles qu'il a de côtez moins deux, c'est-à-dire en quatre. Donc puisque les angles de chaque triangle sont égaux à deux droits, tous les angles de ces quatre triangles seront ensemble égaux à huit droits. Mais ils composent ensemble tous les six angles de cette figure. Ils seront donc égaux à huit droits, c'est-à-dire, à douze droits moins quatre. On peut donc dire que tous les angles d'un Chiliogone, c'est-à-dire, d'une figure de mille côtez, sont égaux à mille neuf cens quatre-vingt-seize angles droits; ce qu'on conçoit clairement, quoiqu'il soit impossible d'imaginer nettement un Chiliogone.

AVERTISSEMENT.

*On entend par Figures Régulieres, celles dont tous les angles & tous les côtez sont égaux *, & qui par conséquent peuvent être inscrites dans un cercle, comme est la figure ci-jointe d'un hexagone: on nomme l'angle* EAF *l'Angle du centre, parce qu'il est formé au centre du cercle par les rayons* AE, AF *tirez aux extrémitez des côtez du Polygone; & les angles semblables à* GEF, *formez par la rencontre des côtez du Polygone, se nomment Angles du Polygone: Et comme il a été démontré † que tous les angles qui se forment au point* A, *pris ici pour le centre*

* *Sup. n.* 106. † *Sup. n.* 19.

tre du Polygone, sont ensemble égaux à quatre droits, lorsqu'on veut savoir la grandeur de chaque angle du centre, comme ici dans l'exemple de l'hexagone, il faut diviser 360 *degrez valeur de quatre droits, par six, nombres des côtez du Polygone, comme l'enseigne l'Arithmetique: le nombre de soixante qui vient au quotient de la division donnera la valeur de l'angle du centre de l'hexagone. L'angle du centre étant connu, celui du Polygone le sera aussi; car comme les trois angles du triangle isoscele* EAF *sont ensemble égaux à deux*



*droits * ou* 180 *degrez, ôtant l'angle du centre, le reste sera la valeur des deux angles égaux sur la base ou côté du Polygone, lesquels sont égaux au seul* GEF *angle dudit Polygone; ainsi celui de l'hexagone se trouvera être de* 120 *degrez. On pourroit également le connoître, par ce qui a été démontré †; puisque cet angle* GEF *a pour sa mesure la moitié de la portion du cercle* GHF, *sur lequel il est appuyé: ainsi ôtant de* 360 *degrez que vaut tout le cercle, la partie* GF, *supposée ici de* 120, *restera* 240, *dont la moitié est la valeur de l'angle* GEF *ou du Polygone.*

QUESTION.

Quels sont les Polygones qui se peuvent toucher par leurs angles, sans laisser d'espace vuide entre eux.

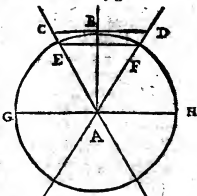
Pour cela il faut que leurs angles qui seront autour

* *sup. n.* 75. † *sup. n.* 39.

tour d'un point commun, fassent précisément quatre angles droits.. Ainsi il n'y a que les quarrez & les hexagones qui le puissent. Les quatre angles de quatre quarrez qui ont un point commun, font quatre angles droits. Les trois angles des trois hexagones qui ont un point commun, étant chacun de cent vingt, font ensemble trois cens soixante, valeur de quatre angles droits.*

Des triangles équilateraux peuvent aussi le toucher; car en ayant placé six autour d'un point, leurs six angles qui se touchent font quatre angles droits.

Lorsqu'on connoit l'angle du centre d'une figure réguliere, on la peut inscrire dans un cercle. Il faut mener du centre deux rayons qui fassent un angle tel que doit être l'angle du centre de cette figure; car si c'est une figure de dix côtez, faisant un angle de trente-six degrez, qui est la dixieme partie de trois cens soixante, la corde de cet angle sera un des côtez de cette figure.



Pour circonscrire un polygone ou figure réguliere autour d'un cercle, il faut premierement l'inscrire & en prolonger les rayons; après, ayant divisé par la moitié un des côtez de ce polygone inscrit, comme EF, *en menant le rayon* AB *par cette moitié, & fait au point* B *une tangente entre* AC *&* AD, *on aura un des côtez du polygone circonscrit. Ensuite il faut faire tous les rayons prolongez de l'inscrit égaux à* AC *&* AD, *par l'extrémité desquels ayant mené des lignes droites, on aura la figure que l'on cherchoit, ainsi qu'il est évident. Mais l'on*

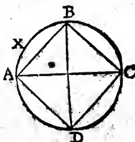
* *Sup. n.* 19.

l'on ne peut faire avec la seule règle & le compas l'angle du centre de toute figure réguliere, sans exception, comme nous le ferons voir ; cela ne se peut que méchaniquement, en se servant d'un demi cercle qui est divisé par degrez, qu'on nomme Rapporteur.

PROBLEME II.

Inscrire un quarré dans le cercle X. Eucl. IV. Prop. 6. 124

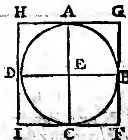
Le cercle *X* est donné pour y inscrire un quarré. Il faut mener une ligne par le centre du cercle, telle que *AC*, qui en soit le diametre ; & sur celle-là & au centre, la perpendiculaire *BD*. Les quatre points *A*, *B*, *C*, *D* sont en égales distances * ; ayant donc mené des lignes droites par ces quatre points, on aura un quarré dans le cercle *X*. Car 1°. cette figure a quatre côtez égaux. 2°. Tous les angles de *ABCD* sont droits †, car chacun d'eux est appuyé sur la demie circonference.



PROBLEME III.

Faire un cercle dans un quarré. Eucl. IV. Prop. 8. 125

Le quarré *FGHI* est donné pour y inscrire un cercle. Ayant coupé par la moitié les quatre côtez de ce quarré, & mené *AC* & *BD*, si du point *E* où ils se coupent, & de l'intervalle *AE*, on décrit un cercle, il se trouvera inscrit dans



E 4 ce

* *L. 1, n. 42.* † *Sup. n. 44.*

ce quarré : car les quatre lignes *AE*, *BE*, *CE*, *DE* sont égales ; ainsi le cercle passera par les points *A*, *B*, *C*, *D*.

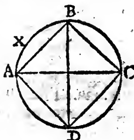
PROBLEME IV.

126 *Circonscrire un quarré à un cercle.* Eucl. IV. Prop. 7.

Le cercle *ABCB*, *fig. preced.* est donné pour lui circonscrire un quarré. Il faut mener deux diametres qui se coupent à angles droits ; ensuite par les quatre extrémitez de ces deux diametres, ayant mené quatre lignes tangentes au cercle *, elles feront le quarré que l'on cherche, comme il est évident.

PROBLEME V.

127 *Faire un cercle autour d'un quarré.* Euclid. IV. Prop. 9.



Le quarré *ABCD* est donné pour lui circonscrire un cercle. Ayant tiré des Diagonales, c'est-à-dire, des lignes droites d'un angle à un autre angle opposé, & prenant pour rayon la moitié d'une des Diagonales, le cercle qu'on décrira sera celui que l'on cherche.

SECTION V.

De la mesure de l'Aire des Surfaces.

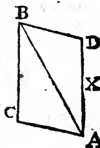
THEOREME I.

128 EN *tout Parallelogramme, les côtez & les angles opposez sont égaux entre eux, & la Diagonale le coupe en deux également.* Eucl. I. Prop. 34.

Soit

* *L. 1. n. 112.*

Soit *X* un parallelogramme dont *AB* est la diagonale; il faut prouver que l'angle *ADB* est égal à *ACB*, & que les côtez *AC* & *BD* sont égaux. Les deux angles *ABD* & *BAC* opposez alternativement sont égaux *: par le même raisonnement *BAD* = *ABC*; le côté *AB* est commun; ainsi ces deux triangles *ABD*, *BAC* sont entierement égaux †: Donc l'angle *D* égal à l'angle *C*, & l'angle *A* à l'angle *B*, puisqu'ils sont composez d'angles égaux, & *AD* = *CB*, comme aussi *AC* = *BD*, & *AB* coupe en deux également le parallelogramme *ABCD*.

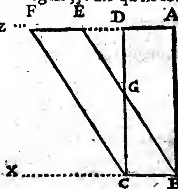


THEOREME II.

Les Parallelogrammes qui sont entre mêmes paralleles & sur même base, ou une autre égale, sont égaux. Eucl. I. Prop. 35. & 36. 129.

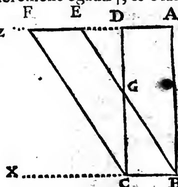
Si les Parallelogrammes *ABCD*, *EFCB* sont entre mêmes paralleles *Z* & *X*, & sur une même base, *BC*, ou une autre égale; je dis qu'ils sont égaux.

Si la base du Parallelogramme *BCEF* n'est pas la même de *ABCD*, sur *BC* soit fait ‡ le Parallelogramme *EFCB* semblable & égal au donné *EFCD*. Il faut prouver que ce dernier Parallelogramme *EFCB* est égal au Parallelogramme *ABCD*.



* *Sup. n. 25.* † *Sup. n. 96.* ‡ *Sup. n. 120.*

Les côtez *AB*, *CD* du Parallelogramme sont paralleles par la supposition, ils sont aussi égaux *. Il en est de même des côtez *EB*, *FC*. Mais si à *AD* & *EF* supposées égales on ajoute *ED*, les toutes *AE*, *DF* seront égales; ainsi les deux triangles *EAB*, *FDC* ayant leurs trois côtez égaux, seront entierement égaux †; & ôtant de ces deux triangles égaux la partie *DGE* qui leur est commune, les trapezes *ABGD* & *CGEF* seront égaux. Ajoutant donc à l'un & à l'autre la même grandeur *BGC*, ce qui fait les Parallelogrammes *ABCD* & *BCEF*, ces deux figures seront égales; ce qu'il falloit prouver.



Il faut remarquer que si le point *E* se trouvoit entre *D* & *A*, au lieu d'ajouter *DE* on l'auroit retranché pour conclure l'égalité des lignes *AE*, *DF*, & ensuite celle des deux triangles *EAB*, *FDC*, & conséquemment celle des deux Parallelogrammes, au moyen du trapeze commun qu'on auroit ajouté.

COROLLAIRE I.

130. *Donc en mesurant la surface d'un parallelogramme, il ne faut avoir égard qu'à la base, & à la perpendiculaire qui mesure sa hauteur.*

Car *fig. preced.* le parallelogramme *BCEF* est égal à un parallelogramme rectangle dont *BC* est la base, & dont les côtez qui sont perpendiculaires sont égaux à sa hauteur. Ainsi c'est le parallelogramme rectangle, comme *ABCD*, qui est

* *sup. n. 128.* † *sup. n. 92.*

est la mesure de tous les parallelogrammes dont les bases seront égales à BC, & qui auront même hauteur, ou seront entre les mêmes paralleles X & Z. Il ne peut y avoir qu'un parallelogramme rectangle sur la base BC entre X & Z; & il peut y avoir une infinité de parallelogrammes non rectangles sur la même base, & entre ces mêmes paralleles X & Z.

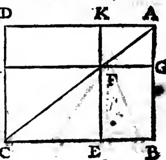
COROLLAIRE II.

Donc en mesurant l'étendue d'un parallelogramme non rectangle, il ne faut point avoir égard à son circuit. 131

Car quand les côtez BE & CF seroient d'un million de lieues ou infinis; ce qui se peut concevoir en supposant que les lignes X & Z soient prolongées à l'infini: ce parallelogramme dont le circuit est infini, ne sera pas plus grand que $ABCD$ dont le circuit est fini.

THEOREME III.

Si par un point quelconque de la diagonale d'un parallelogramme on tire deux lignes paralleles aux côtez, elles diviseront le parallelogramme en quatre pieces, dont les deux que la diagonale ne traverse pas, & qu'on appelle Complémens, sont égaux entre eux. Euclid. I. Prop. 43. 132

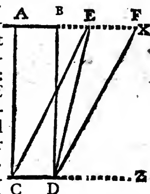


$ABC = ADC$, & $AGF = AKF$, & $FEC = FHC$ *. Des deux triangles égaux ADC, & ABC, ôtant des grandeurs égales AKF & FHC, d'une part; & AGF & FEC de l'autre; les restes $FKDH$ & $BEFG$ seront égaux; ce qu'il falloit démontrer.

* Sup. n. 128.

Theoreme IV.

133 *Les parallelogrammes sont doubles des triangles de même hauteur & de même base.* Eucl. I. Prop. 41.



Le triangle *ECD* a même base que le parallelogramme *ABCD*, & ils ont même hauteur étant entre les paralleles *X* & *Z*: je mene *DF* parallele à *CE* pour faire le parallelogramme *DCEF*, lequel est égal à *ABCD* *. Or *CED* est égal à *EDF* †. Donc *DCEF* ou la grandeur égale *ABCD*, est le double de *CED*.

Corollaire I.

134 *Donc les triangles de même base ou de base égale & de même hauteur, sont égaux.* Eucl. I. Prop. 37. & 38.

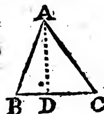
Puisqu'ils sont tous la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur.

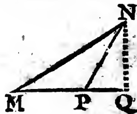
Corollaire II.

135 *Donc pour mesurer la surface d'un triangle, il ne faut avoir égard qu'à sa hauteur & à sa base.*

Puisqu'il est égal à la moitié d'un parallelogramme, qui a même base & même hauteur.

Avertissement.





Pour mesurer le triangle ABC, *il faut donc abais-*

* *sup. n.* 129. † *sup. n.* 128.

abaisser du sommet la perpendiculaire AD, *qui en est la hauteur*, & *multiplier* BC *par la moitié de* AD, *ou* AD *par la moitié de* BC; *ou* BC *par* AD, & *en prendre la moitié; ce qui revient au même.*

Si le triangle étoit obtusangle, comme MNP, *alors pour avoir la hauteur, il faudroit prolonger le côté* MP, & *du sommet* N *tirer la perpendiculaire* NQ.

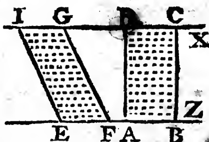
THEOREME V.

Les triangles égaux de même base, ou de base égale, & posez d'une même part, sont entre les mêmes paralleles. Eucl. I. Prop. 39. & 40. 136

S'ils sont égaux, ils ont même hauteur*; & par conséquent les perpendiculaires abaissées de leur sommet sur leurs bases seront égales. Si on mene donc une ligne par leur sommet, elle sera parallele à leur base †.

AVERTISSEMENT.

Ces Propositions se peuvent démontrer par une autre méthode, dont il est bon ici de donner quelque connoissance. Il est évident 1°. *que lorsque deux surfaces planes sont faites par le mouvement de deux lignes droites & égales, si le mouvement de l'une & de l'autre ligne est égal, & qu'il dure autant de tems, ces deux surfaces sont égales. Si par exemple* AB *est égale à* EF, & *que ces deux lignes se meuvent parallelement à elles-mêmes d'un mouvement égal, venant dans un même tems de* Z *à* X



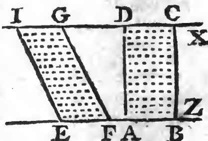
deux lignes paralleles, les deux parallelogrammes ABCD & EFGI *que décrivent* AB & EF, *sont égaux.*

E 7

* *Sup. n.* 134. † *L.* 1. *n.* 64.

égaux. Si EF *se meut bien toujours parallelement à elle-même, mais qu'en même tems elle ait un autre mouvement qui la porte ou à droit ou à gauche, on voit bien que ses extrémitez* E & F *décrivent de plus grandes lignes que* A & B *extrémitez de* AB *qu'on suppose n'avoir qu'un mouvement qui la porte par le plus court chemin de* Z *à* X; *ainsi quoique* ABCD & EFGI *soient des surfaces égales, le circuit de celle-ci est plus grand.*

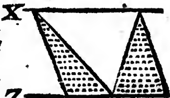
Si ces lignes AB & EF *en se mouvant laissoient à chaque instant une trace, il est évident que comme on suppose qu'elles sont portées dans un même tems de* Z *à* X, *les deux surfaces* ABCD & EFGH *qu'elles décrivent, seroient couvertes d'un nombre égal de lignes toutes égales: & par conséquent que ces deux surfaces doivent être égales. Ce qu'on peut démontrer encore plus sensiblement: Au lieu que* AB & EF *sont des lignes mathématiques sans largeur, supposons que ce soient des lignes qui ont quelque largeur, mais si petite qu'elle soit absolument indivisible, & qu'on les ait rangé parallelement les unes à côté de* AB, *les autres à côté de* EF, *entre* Z & X *lignes paralleles. Puisque l'espace entre* Z & X *est partout le même, & que ces indivisibles sont toutes égales, il y en aura autant sur* AB *que sur* EF, *elles feront par conséquent deux surfaces égales. Si celles qui sont sur* EF *sont bien toujours paralleles entre elles, mais que l'extrémité de la seconde passe au-delà de* E, & *celle de la troisieme encore au-delà; alors le circuit de* EFGI *sera plus grand que celui*



lui de ABCD ; & *si nous supposions dans ces lignes une largeur indivisible, c'est-à-dire insensible, les côtez* E I & F G *ne seroient pas des lignes ; mais des lignes comme dentelées.*

Cette méthode que nous expliquons ici s'appelle la méthode des indivisibles ; parce qu'on suppose des lignes qui ont une largeur indivisible à cause de sa petitesse.

On peut employer cette même méthode pour prouver l'égalité des triangles qui sont sur une même base, & qui ont la même hauteur ou qui sont entre deux paralleles ; car si on suppose que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles se diminuent proportionnellement, il faut que dans le même tems elles fassent des surfaces égales. Si aussi on conçoit deux surfaces sur deux bases égales, composées d'un égal nombre de lignes indivisibles, qui sont diminuées proportionnellement, de sorte que toutes soient égales chacune à chacune ; il faut que ces deux surfaces qui sont deux triangles, soient égales.



137 *Remarquez que de deux triangles d'une surface égale, celui dont les côtez & les angles sont plus égaux entre eux, a moins de circuit. Le triangle même rectangle aura plus de circuit qu'un équilateral qui lui soit égal : car soit* ABC *un rectangle,* & A B D *un équilateral de même hauteur ; ils sont égaux* *. *Soit* A C *prolongé en* E, *de sorte que* AC = CE. *Le circuit de* ACB *est* AB + BC + CE. *Soit prolongé* B D *jusqu'à* E, *chaque angle de* A B D *est de* 60, &
EAB

* *sup. n.* 134.

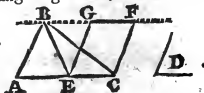


EAB étant de 90, les angles AEB *&* EAD *sont chacun de* 30. *Ainsi* EDA *est un isoscele, &* DE=AD. *Donc* AB + BE *est le circuit de* ABD. *Or* BE *est plus petit que* BC+CE; *donc le circuit de* ABD *est plus petit que le circuit de* ABC. *Nous ferons voir dans la suite, qu'une figure qui est plus uniforme en toutes ses parties, renferme une plus grande surface dans un moindre circuit.*

PROBLEME I.

138 *Faire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle donné.* Euclid. I. Prop. 42.

Le triangle donné est *ABC*, & l'angle donné *D*. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle, qui ait l'angle égal à *D*.



1°. Par *B*, sommet du triangle *ABC*, je mene *BF* parallele à sa base *AC* *. 2°. Sur *E*, moitié de cette base, j'éleve *GE* qui fasse avec *AC* un angle égal à *D* †. 3°. J'acheve le parallelogramme *CEGF* ‡, qui sera celui qu'on demande; car il est égal au triangle *ABC* ‡, & il a l'angle *GEC* égal à l'angle donné *D*.

PROBLEME II.

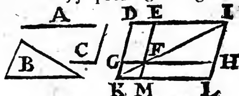
139 *Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné.* Eucl. I. Prop. 44.

La ligne donnée est *A*, l'angle donné est *C*. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle *B*.

1°. Par le Problême précédent, je fais, selon l'ar-

* *L.* 1. *n.* 72. † *sup. n.* 29. ‡ *L.* 1. *n.* 72. ‡ *sup. n.* 133.

l'angle *C*, le parallelogramme *DEFG* égal au triangle *B*. 2°. Je prolonge *GF* & *DE*: de sorte que *FH* = *A*, & *EI* = *FH*; j'acheve le parallelogramme *EFHI*, je prolonge la ligne *IF* jusqu'à ce qu'elle trouve le prolongement de *DG*; & j'acheve le parallelogramme *DKLI*, dans lequel *FHLM* est égal à *DEFG* *. Ainsi *FHLM* est le parallelogramme que l'on cherchoit égal au triangle *B* à qui *DEFG* a été fait égal, ayant un angle égal à l'angle donné *C*, & étant fait sur *FH* égale à la ligne donnée *A*.



PROBLEME III.

Décrire un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné. Eucl. I. Prop. 45. 140

La figure rectiligne donnée est *ABCD*, l'angle donné *E*. 1°. Je résous la figure *ABCD* en deux triangles, par la ligne *AC*. 2°. Je fais le parallelogramme *GI* égal au triangle *ABC*, ayant l'angle *G* égal à l'angle donné *E* †. 3°. Sur *HI* je fais aussi le parallelogramme *IL* égal au triangle *ACD*, ayant l'angle *IHL* égal audit angle *E* ‡. Cela étant fait, *GK* = *GI* + *IL*: donc *GK* = *ABCD* est le parallelogramme requis.



Que si la figure avoit été composée de plus de deux triangles, on auroit fait la même chose sur la ligne KL.

* *Sup. n.* 132. † *Sup. n.* 138. ‡ *Sup. n.* 139.

KL *pour le troisieme triangle, qu'il a été fait sur* HI *pour le second; & ainsi des autres.*

DEFINITION.

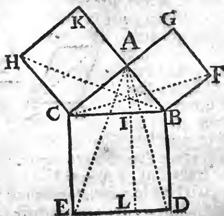
141 *Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme Hypothenuse.*

THEOREME VI.

142 *Dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypothenuse, ou du côté qui soutient l'angle droit, est égal aux deux quarrez des deux autres côtez.* Eucl. I. Prop. 47.

Soit le triangle rectangle *CAB*. Si sur l'hypothenuse *CB* on fait le quarré *CD* (*on désigne ainsi un quarré ou parallelogramme par deux lettres en diagonale*) & sur les deux autres côtez *CA* & *AB*, on fait les quarrez *CK*, *BG*: Je dis que $CD = CK + BG$.

Soit mené du sommet *A*, la ligne *AL* perpendiculaire sur l'hypothenuse *BC*, elle divisera le quarré *CD* en deux parallelogrammes *IE* & *ID*, dont le premier est égal au quarré *CK*, & le second au quarré *BG*; ce que l'on démontre ainsi.



Soit mené du point *A* au point *E* la ligne *AE*, & du point *B* au point *H* la ligne *BH*. Ces deux lignes formeront les deux triangles égaux *ACE*, *BCH**. Car le côté $CE = CB$, & $CA = HC$; & les angles *ACE* & *HCB* renfermez par

* *sup. n. 98.*

par ces côtez sont égaux, ayant chacun un angle droit, & l'angle ACB commun. Mais le triangle ACE est moitié du parallelogramme IE*, parce que ces deux figures ont même base & qu'elles sont entre les mêmes paralleles. De même le triangle HCB est moitié du quarré CK, par la même raison. Or ces triangles sont égaux; donc les parallelogrammes qui en sont doubles, seront aussi égaux.

Ce que l'on vient de dire du parallelogramme IE, & du quarré CK, se doit entendre du parallelogramme ID, & du quarré BG : donc, &c.

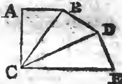
REMARQUE.

Cette Proposition est d'un usage très fréquent & très étendu dans la Géometrie, aussi bien que dans la Résolution des Problêmes par l'Analyse.

PROBLEME IV.

Trouver un quarré égal à deux ou à plusieurs autres quarrez. 141

Il ne faut que joindre les deux bases, AB, AC, des deux quarrez proposez, de sorte qu'ils fassent un angle droit, la base CB de cet angle sera le côté d'un quarré égal à ces deux quarrez, selon le précédent Théorême. Si l'on demande un quarré égal à trois quarrez donnez, & que BD soit le côté du troisieme, je joins BC & BD, de sorte que ces deux lignes fassent un angle droit. Alors le quarré de CD est égal aux quarrez de BC & de BD, par conséquent aux quarrez de AC, de AB, de BD; & par cette méthode l'on trouvera un quarré qui soit égal à tant de quarrez que l'on voudra.



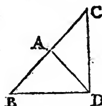
* *Sup. n.* 133.

THEO-

THEOREME VII.

144 *Si le quarré d'un des côtez d'un triangle est égal aux quarrez des deux autres côtez, l'angle compris entre ces deux côtez est droit.* Eucl. I. Prop. 48.

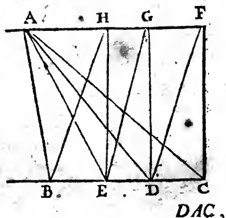
Je suppose qu'au triangle *ABD* le quarré du côté *BD* soit égal aux quarrez des deux autres côtez *AB*, *AD*. Cela étant, je dis que l'angle *BAD* compris entre les deux côtez *AB*, *AD*, est droit.



Soit fait *AC* perpendiculaire sur *AD* & égale à *AB*; donc les quarrez de *AD* & *AC* sont égaux à celui de *DC* *. Or ces deux quarrez sont égaux par hypothese à celui de *BD*; donc les quarrez de *BD* & de *DC* sont égaux: Ainsi *CD* & *BD* sont égaux; donc les deux triangles *ABD* & *ADC* sont entierement égaux, & par conséquent équiangles †. *BAD* est donc droit, aussi bien que *CAD*. On suppose ici, ce qui est évident, que les quarrez égaux ont des côtez égaux.

THEOREME VIII.

145 *Un triangle est égal à deux ou plusieurs triangles de même hauteur, dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne.*



Le triangle *ABC* est égal aux triangles *ABE*, *EAD* & *DAC*,

* *sup. n.* 142. † *sup. n.* 92.

DAC, qui font ses parties. Or $ACD = CFD$, & $DAE = DGE$, & $EAB = EHB$ *; donc *CAB* est égal à deux ou plusieurs triangles, &c. Ce qu'il falloit prouver.

DEFINITION.

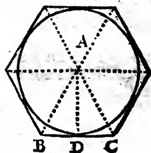
On appelle Apothême *la partie du rayon perpendiculaire, qui est entre le côté d'un polygone inscrit, & le centre du cercle.* 146

AD est un apothême. (*figure suivante.*)

THEOREME IX.

La surface d'un polygone régulier est égale à un triangle qui a pour base le circuit de ce polygone, & pour hauteur l'apothême de ce polygone. 147

Ayant mené des lignes du centre *A* à chaque angle, on le réduit en autant de triangles qu'il a de côtez, tous égaux au triangle *ABC* qui a *BC* pour base, & pour hauteur l'apothême *AD*; or un triangle qui a *AD* pour hauteur, & pour base le circuit de ce polygone, est égal à tous ces triangles dont la hauteur est *DA*; & les bases prises ensemble, font le circuit de ce polygone †: qui est ce qu'il falloit prouver.



Propositions évidentes touchant les Polygones.

PROPOSITION I.

Un polygone est plus grand que le cercle auquel il est circonscrit. 148

PRO-

* *Sup. n.* 134. † *Sup. n.* 143.

PROPOSITION II.

149 *Un polygone est plus petit que le cercle dans lequel il est inscrit.*

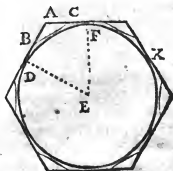
PROPOSITION III.

150 *Un cercle peut être pris pour un polygone d'une infinité de côtez.*

Car si un polygone dont le diametre est petit avoit un million de côtez, il est évident qu'il ne differeroit pas sensiblement d'un cercle. Si, dis-je, on conçoit dans un cercle autant de côtez qu'il a de points sensibles, ce sera un polygone & un cercle en même tems.

THEOREME X.

151 *De deux polygones réguliers circonscrits à un cercle, celui qui a plus de côtez, a un plus petit circuit & une plus petite surface.*



X est un polygone circonscrit à un cercle: je divise ses côtez pour faire un autre polygone qui ait plus de côtez, en menant des tangentes qui seront hors du cercle*; ainsi ce polygone sera plus grand que ce cercle†. Je considere la même partie de ces deux polygones, c'est-à-dire, qui soit circonscrite à la même partie du cercle, par exemple à *EFD*; puisque *BA* + *AC* est plus grand que *BC*; donc *BD* + *BA* + *AC* + *CF* est plus grand que *DB* + *BC* + *CF*; ainsi le circuit de celui qui a moins de côtez est plus grand. La figure *EFCABD* excede *EFCBD* de la grandeur du triangle *ABC*; la surface de celui qui a plus de côtez est donc plus petite.

C o-

* L. 1. n. 106. † Sup. n. 146.

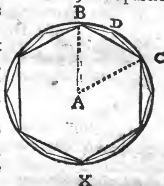
COROLLAIRE.

Donc puisque plus un polygone circonscrit a de côtez, plus il est petit, demeurant toujours plus 152
grand que le cercle auquel il est circonscrit; il s'ensuit que plus un polygone a de côtez, son circuit & sa surface approchent plus du circuit & de la surface du cercle auquel il est circonscrit; & qu'ainsi un polygone circonscrit d'une infinité de côtez ne differe point du cercle.

THEOREME XI.

De deux polygones réguliers inscrits dans un même cercle, celui qui a plus de côtez a un plus 153
grand circuit & une plus grande surface.

Deux polygones étant inscrits dans le cercle *X*; je considere la partie *ABDC*, & les parties de ces deux polygones qui y répondent.



1°. *BD* + *DC* est plus grand que *BC*; partant le circuit de celui qui a plus de côtez est déja plus grand.

2°. La figure *ABCD* surpasse *ABC* de la grandeur du triangle *BDC*; ainsi le polygone qui a plus de côtez a une plus grande surface: ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE

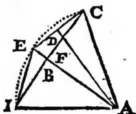
Donc puisque de deux ou plusieurs polygones inscrits dans un même cercle, celui-là est plus 154
*grand qui a plus de côtez, demeurant toujours plus petit que le cercle *; il s'ensuit que plus un polygone inscrit a de côtez, plus il approche de la circonference & de la surface du cercle; & qu'ainsi un*

* *Sup. n.* 147.

un polygone inscrit, qui a une infinité de côtez, ne differe point du cercle.

THEOREME XII.

155 *De deux polygones réguliers inscrits dans un même cercle, ou cercles égaux, celui qui a plus de côtez a un plus grand apothême.*



EC est la corde du polygone qui a plus de côtez, *CI* celle de celui qui en a moins; ainsi *CE* étant la corde d'un plus petit arc, est plus petite, & par conséquent plus éloignée du centre *A* que *CI* *. Donc la perpendiculaire *AD* qui est l'apothême du polygone dont *CE* est la corde, est plus grande que *AB* apothême du polygone dont *CI* est la corde; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

156 *La surface d'un cercle est égale à un triangle qui a pour sa hauteur le rayon du cercle, & pour base la circonference.*

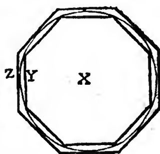
On peut supposer selon les deux Théorêmes précédens & leurs Corollaires, qu'un cercle est égal à un polygone d'une infinité de côtez, qui lui est circonscrit ou inscrit. La surface de ce polygone est égale à un triangle qui a pour base son circuit, qui est ici la même chose que la circonference du cercle, & pour hauteur l'apothême ou la perpendiculaire menée du centre de ce polygone sur un des côtez de ce même polygone, qui ayant un nombre infini de côtez, cette perpendiculaire n'est point differente du rayon du cercle où il est inscrit. Prenant donc le cercle pour un polygone semblable, sa surface est égale à un triangle, dont

* *L. 1, n. 96.*

dont la base est égale à sa circonference, & la hauteur est égale à son rayon.

Le rayon d'un cercle se peut mesurer facilement, il n'en est pas de même de sa circonference qu'on ne connoit pas encore. C'est ce qui empêche de trouver la quadrature du cercle, c'est-à-dire, de faire un quarré égal à la surface renfermée dans un cercle: car si on connoissoit cette circonference, on formeroit facilement un triangle égal au cercle, faisant sa base égale à cette circonference, & sa perpendiculaire égale au rayon. Ce triangle, suivant ce qui sera enseigné dans la suite, se changeroit facilement en un quarré qui lui seroit égal, & par conséquent audit cercle. Mais on ne peut exprimer la grandeur de la circonference d'un cercle qu'en assignant deux lignes, l'une plus grande & l'autre plus petite que cette circonference, qui ne different entre elles que d'une grandeur moindre que toute grandeur qu'on puisse marquer; ce que l'on démontre de cette maniere.

Soit le cercle donné X; *je suppose qu'un polygone, que je nomme* Z, *lui soit circonscrit, & qu'un autre que j'appelle* Y *lui soit inscrit. La grandeur donnée, qui est la difference de la surface du cercle à une autre surface, est* T.



J'augmente ou diminue les côtez des polygones Z & Y, *jusqu'à ce que leur difference soit plus petite que la grandeur* T; *ce qui est facile: car en augmentant les côtez de l'un & l'autre, on augmente la*

grandeur de Y *, & *on diminue celle de* Z †. *Ainsi l'un & l'autre approchent plus de la circonference du cercle. La difference de* Z *avec* Y *est plus grande que celle de* Z *avec le cercle* X, *puisque* X *est plus grand que* Y ; *donc la difference des surfaces de* Z & *de* Y *étant plus petite que la grandeur* T, *on trouve une surface qui differe de celle du cercle d'une grandeur plus petite que celle qu'on avoit proposée : c'est-à dire, que si on proposoit de trouver une surface qui ne differât de celle d'un cercle donné que de la cent-millieme partie d'une ligne, on en pourroit trouver une qui differeroit encore moins.*

* *sup.* n. 152. † *sup.* n. 149. & 150.

ELEMENS DE GEOMETRIE.



LIVRE TROISIEME.

Les proprietez qui conviennent à toute Grandeur, appliquées aux Lignes, Plans, Solides; & démontrées.

SECTION PREMIERE.

Les quatre Operations de l'Arithmetique, Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion, ſur les Lignes, ſur les Plans, & ſur les Solides.

OPERATION I.



LA premiere & la plus ſimple proprieté 1
de toute grandeur, & par conſéquent
d'une ligne, d'un plan, d'un ſolide,
c'eſt de pouvoir être augmentée, ou
diminuée. On peut ajouter une ligne à une ligne, les joignant, ou les prolongeant. On peut de même ajouter un plan à un plan, en les continuant ou les mettant côte à côte l'un de l'autre. Quand on exprime des grandeurs, ſoit li-

lignes, ſoit plans, ſoit ſolides avec des lettres, le ſigne de l'Addition eſt celui-ci $+$; ainſi $a+b$ veut dire que les grandeurs qu'on appelle a & b, nombres ou lignes, ſont ajoutées enſemble. Lorſque la même lettre ſe trouve repetée pluſieurs fois, on ne la marque qu'une ſeule fois, mais on met devant un chiffre, qui ſignifie combien de fois elle eſt ajoutée à elle-même, $3b$ ſignifie que b eſt ajouté trois fois à lui-même. Pour ajouter une grandeur qui a le ſigne $+$ à la même qui a le ſigne $-$, on les efface toutes deux; car plus & moins une même grandeur, ce n'eſt rien. Ainſi dans une Addition, il faut effacer les mêmes grandeurs qui ont des ſignes contraires. Dans la Géometrie l'on marque ordinairement une ligne par deux majuſcules aux deux extrémitez, comme AB, ou par une ſeule petite lettre qu'on met au milieu, a, marque la ligne AB.

A———B
a

Operation II.
Souſtraction.

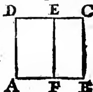
2 Le ſigne de la Souſtraction eſt une petite barre; ainſi $a-b$ marque que l'on conçoit que de a on a retranché b, & que par conſéquent a étoit plus grand que b.

La difference de deux grandeurs, c'eſt l'excès de la plus grande par deſſus la plus petite, ou la plus grande moins la plus petite. Soient deux lignes AB & CD; ayant pris ſur AB la ligne AE égale à CD, leur difference eſt EB excès de AB par deſſus CD, ou la plus grande ligne AB moins la plus petite CD; c'eſt-à-dire, ce qui reſte de la plus grande après le retranchement de la plus petite.

E
A———B
C———D

Si

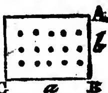
Si l'on retranche du plan *ABCD*, le plan *BCEF*, pour marquer ce retranchement l'on écrit de même *ABCD*—*BCEF*; ce qui sera la difference de ces deux plans.



Après ce retranchement, le reste est le plan *ADEF*. La règle générale de la Soustraction est de changer les signes de la grandeur qu'on veut retrancher. On sous-entend toujours le signe + devant la grandeur qui n'a aucun signe. Ainsi pour ôter *b* de *a*, c'est-à-dire, +*b* de *a*, il faut changer ce + en —, & écrire *a*—*b*.

OPERATION III.
Multiplication.

Multiplier une grandeur par une autre, c'est 3
prendre l'une, (n'importe par laquelle on commence,) autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre. Multiplier *a* par *b*, c'est prendre *a* autant de fois que *b* a d'unitez ou de parties; ce qu'on marque en unissant ainsi ces deux lettres, *ab*. Il est évident que ce plan est fait par la mouvement de la ligne *b*, mue de *B* à *C*; partant repetée ou prise autant de fois qu'il y a d'unitez ou de parties en *a*.

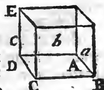


Quand on marque un plan par deux lettres ainsi, *ab*, on suppose que *a* ou *BC* fait un angle droit avec *b* ou *AB*. Nous avons démontré dans le Livre précédent, que la grandeur d'un plan ne dépend pas seulement de la longueur de ses côtez, mais aussi de la nature de l'angle qu'ils font; qu'un parallelogramme rectangle est plus grand * que celui qui

* L. 2. n. 230.

ne l'est pas. Il a ainsi une mesure déterminée ; c'est pourquoi on suppose, comme je le viens de dire, que deux lignes qu'on conçoit multipliées l'une par l'autre, font un rectangle.

Quand on se sert de petites lettres, leur union est une marque qu'elles sont multipliées l'une par l'autre ; mais il n'en est pas de même quand on se sert de capitales. Ainsi *AB* ne marque pas que *A* est multiplié par *B*, mais que *AB* est une ligne, dont *A* & *B* sont les extrémitez. Le signe de la multiplication de deux lignes marquées avec des capitales est celui-ci ×, qui est une petite croix de S. André, $AB \times BC$, marque que *AB* est multiplié par *BC*.



Si l'on conçoit que le plan *ABCD* est pris autant de fois, & mis sur soi-même, qu'il y a de parties dans *DE*, cela fait un solide $ABCD \times DE$. Si $AB = a$, & $AD = b$, & $DE = c$, le produit sera abc. Comme l'on marque un plan avec deux petites lettres, on marque le solide avec trois.

OPERATION IV.

Division.

4 On nomme Dividende la grandeur qu'on propose à diviser ; Diviseur, celle par laquelle on divise ; Quotient, celle qui exprime combien de fois le Diviseur est dans le Dividende.

Pour marquer qu'une grandeur est divisée par une autre, on met leurs lettres l'une sous l'autre, & on les sépare par une petite ligne. Pour diviser *a* par *b*, on met *a* sur *b*, de cette maniere $\frac{a}{b}$, qui marque qu'on conçoit que *a*

est

eſt diviſé par b. La Diviſion eſt une eſpece de Souſtraction. Quand on ôte une grandeur toute entiere d'elle-même, il ne reſte rien; Ainſi diviſer a par a c'eſt ôter a de a autant de fois qu'il y eſt contenu. Il y eſt une fois; ainſi en diviſant a par a, il ne doit rien reſter: le Dividende & le Diviſeur diſparoiſſent; par conſéquent leurs lettres qui ſont également dans le Diviſeur & dans le Dividende doivent être ſupprimées. Pour diviſer cd par c, il faut ſupprimer c, & laiſſer d, qui ſera le quotient de cd diviſé par c, c'eſt-à-dire, que d ſera le ſigne du nombre de fois que c eſt dans cd. La Diviſion défait ce qu'a fait la Multiplication. Quand on multiplie c par d, on les joint, cd. Diviſant donc cd par c, il faut que c ne paroiſſe plus, & qu'il ne reſte que d. S'il falloit multiplier $\frac{cd}{a}$ par a, il faudroit effacer a; c'eſt-à-dire, que le produit de $\frac{cd}{a}$ par a eſt cd: car $\frac{cd}{a}$ c'eſt cd diviſé par a, & effaçant a, on rétablit cd; la diviſion défait, & la multiplication refait.

Remarquez que le quotient d'une diviſion étant multiplié par le Diviſeur, il produit une grandeur égale à celle qui a été diviſée, ce qui eſt évident: car multiplier le quotient par le Diviſeur, c'eſt le prendre autant de fois qu'il eſt contenu dans la grandeur à diviſer.

Les mêmes Operations, Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion, lorſque les Grandeurs ſont complexes.

On dit qu'une grandeur eſt complexe, lorſqu'elle eſt compoſée de deux ou de pluſieurs 5

grandeurs, qui ſont exprimées chacune par un ſigne particulier: $a+b$ & $a-b$, ſont des grandeurs complexes. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'eſt rien. $+3-3$ eſt égal à zero; donc pour rendre une expreſſion nette, on efface celles qui ſe trouvent avec des ſignes contraires. Ayant par exemple cette expreſſion $5b-2b$, on la réduit à celle-ci, $3b$. Car, comme nous en avons averti, lorſqu'une grandeur n'a point de ſigne exprimé, il faut ſous-entendre le ſigne $+$; ainſi $5b-2b$, c'eſt comme s'il y avoit $+5b-2b$. Or dans cette expreſſion il y a $2b$ avec des ſignes contraires, je l'efface donc, & j'écris $+3b$, ou ſimplement, $3b$.

Addition des Grandeurs complexes.

6 Les grandeurs complexes s'ajoutent comme les ſimples. Pour ajouter $b+c$ avec $f+b$, il faut les joindre par le ſigne $+$ ainſi; $b+c+f+b$. Il faut toujours effacer les lettres qui ſe trouvent avec des ſignes contraires; ainſi ajoutant $b+d$ avec $c-d$, on écrit ſeulement $b+c$.

Lorſque les mêmes lettres ſe trouvent repetées pluſieurs fois, on n'en met qu'une avec le chiffre devant, qui fait connoitre combien de fois elle eſt priſe; comme ici pour ajouter $4f+6g$ avec $3f-4g$, on écrit: $7f+2g$. Si l'on avoit marqué cette operation au long, on auroit écrit; $4f+6g+3f-4g$. Or $4f+3f=7f$, & $+6g-4g=+2g$.

Pour ajouter de part & d'autre du ſigne de l'égalité une même grandeur, là où elle ſe trouve avec le ſigne $-$, il faut l'effacer, & la mettre de l'autre côté avec le ſigne $+$. Soit cette égalité

lité $a = b - d$; pour ajouter d de part & d'autre, j'écris $a + d = b$. L'operation tout au long seroit: $a + d = b - d + d$. Mais $-d + d = o$.

Soustraction des Grandeurs complexes.

La règle générale de cette operation, est la même que pour les grandeurs simples: il faut changer les signes de la grandeur à retrancher. On doit toujours sous-entendre le signe + devant toute grandeur qui n'a aucun signe. Partant pour ôter $b + d$ ou $+ b + d$ de $c + f$, il faut écrire $c + f - b - d$. Car 1°, il faut joindre b avec $c + f$ par $-$, signe de la Soustraction. 2°. Ce n'est pas seulement $+ b$ qu'on veut retrancher, mais encore $+ d$; il le faut donc écrire ainsi $- d$. Au contraire, pour ôter $b - d$ de $c + f$, il faudroit changer les signes de $+ b - d$, mettant $c + f - b + d$. Car quand on soustrait $b - d$ de $+ f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b; il s'en faut la grandeur d. Ainsi ayant mis $c + f - b$, on retranche de $c + f$ plus qu'il ne faut retrancher, savoir la grandeur d; c'est pourquoi on l'ajoute à $c + f$ en cette maniere, $c + f - b + d$. 7

Remarquez bien que dans cette expression $c + f - b - d$, ce n'est pas de b que d est retranché; mais b & d sont retranchez de $c + f$.

Quand on a à soustraire de part & d'autre du signe de l'égalité une même grandeur, il n'y a qu'à l'effacer où elle se trouve avec le signe $+$, & la mettre de l'autre côté avec le signe $-$. Soit $a = b + d$; pour ôter d de part & d'autre, j'écris: $a - d = b$.

Multiplication des Grandeurs complexes.

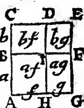
8 Les queſtions ſur la multiplication des Grandeurs complexes, ſe réduiſent à ces trois. 1°. Multiplier une ligne, plus une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne : comme $a + b$ par $f + g$. 2°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne ; comme $a - b$ par $f + g$. 3°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne moins une autre ligne.

Règles pour ces trois cas.

REGLE I.

Lorſque les deux grandeurs données à être multipliées l'une par l'autre, ont chacune le ſigne +, leur produit doit avoir le même ſigne +.

Pour multiplier $a + b$ par $f + g$, il faut commencer l'operation par multiplier a par f, écrivant af, ce qui eſt le ſigne du produit de a par f. Faiſant de même autant de multiplications partiales qu'il y a ici de lettres, on aura $af + bf + ag + bg$, pour produit de $a + b$ par $f + g$. Pour rendre la choſe ſenſible, ſoit $a + b = AC$. Soit $a = AB$ & $b = BC$. Soit auſſi $f + g = AG$, & $f = AH$ & $g = HG$. Je ſuppoſe que $ACEG$ eſt un rectangle coupé par des paralleles, qui font les parallelogrammes, $ABIH$, $FGIH$, $BCDI$, $DEFI$, auxquels parallelogrammes eſt égale leur ſomme $AC\ EG$. Le tout eſt égal à ſes parties. Or ces quatre produits $af + bf + ag + bg$ ſont égaux à ces qua-



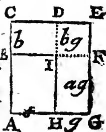
quatre parallelogrammes, comme il est évident: ils sont donc égaux à $AC \times AG$; c'est-à-dire, au parallelogramme de AC par AG, ou de $a + b$ par $f + g$.

REGLE II.

Plus en moins, ou moins en plus, donne un produit, qui doit avoir le signe —.

C'est-à-dire, que si l'une des deux grandeurs a le signe —, & l'autre le signe +, leur produit doit avoir le signe —. Suivant cette Règle pour multiplier $a + b$ par $f - g$, je multiplie 1°, $a + b$ par f, ce qui fait $af + bf$; mais comme ce n'étoit pas par toute la valeur de f qu'il falloit multiplier $a + b$, qu'il s'en falloit la valeur de g, ce produit $af + bf$ est trop grand de la valeur de g, multipliant $a + b$, c'est-à-dire, de $ag + bg$ J'ôte donc ce que j'avois mis de trop, & l'expression sera $af + bf - ag - bg$.

Soit $a = AB$ ou HI. $b = BC$ ou ID. $g = HG$ ou IF, & $f = AG$. Ainsi $a + b = AC$, & $f - g = AH$; donc $af = AB \times AG$; & $bf = BC \times BF$. Il faut démontrer que $af + bf - ag - bg = ACDH$, ou que $ACDH = ACEG - FGHI - DEFI$; ce qui est évident.

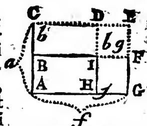


REGLE III.

Moins en moins donne plus.

Multipliant ces deux grandeurs complexes l'une par l'autre, $a - b$, & $f - g$, leur produit est $af - bf - ag + gb$, où vous voyez qu'on marque le produit de $-g$ par $-b$ avec le signe +. Il faut prouver que cela est bon.

 Soit



Soit $a = AC$, & $b = BC$. Ainsi $a - b = AB$. Soit aussi $f = AG$, & $g = HG$; ainsi $f - g = AH$. Pour démontrer ce qui est en question, considerez que $ABIH$ est égal à $ACEG$, ou af, si l'on en retranche 1°, $DEGH$, ou ag, & $BCEF$ ou bf, pourvu qu'on lui rajoute $DEFI$, ou bg, qu'on lui ôte de trop; car en ôtant $DEGH$, & $BCEF$, on ôte deux fois $DEFI$, ou bg. Ainsi $af - bf - ag + bg$ est le produit de $a - b$ par $f - g$. Moins en moins donne donc plus, c'est-à-dire, qu'à la fin du produit le signe $+$ se doit trouver, parce qu'ayant trop ôté, il faut remettre ce qu'on ôtoit de trop.

Division des Grandeurs complexes.

9 La règle générale de la Division, soit des Grandeurs complexes, soit des Grandeurs incomplexes, est de mettre le dividende au-dessus d'une ligne, & le diviseur dessous. Ainsi pour diviser $ax + cd$ par $xd + cb$, j'écris $\frac{ax + cd}{xd + cb}$.

On a vu que dans les incomplexes il faut effacer les mêmes lettres qui se trouvent dessus & dessous; il le faut faire aussi dans les complexes, lorsqu'elles se trouvent dans chaque partie du dividende & du diviseur. Cette expression $\frac{ax + dx}{bx + cx}$ se peut donc réduire à celle-ci plus simple, $\frac{a + d}{b + c}$, qui est d'égale valeur.

Comme la division défait ce que la multiplication a fait, les trois règles qu'on vient de don-

donner de la multiplication font connoitre en voyant les signes d'un quotient, quels signes peuvent avoir le dividende & le diviseur, 1°, si tous deux ont le signe +; 2°, si l'un a +, & l'autre −; 3°, si tous deux ont le signe −.

AVERTISSEMENT.

En voilà assez pour entendre la suite de ces Elémens de Géometrie; mais pour pratiquer avec plus de facilité cette maniere d'Arithmetique par lettres, ce qui s'appelle Algebre, il faut lire les Elémens des Mathématiques.

SECTION II.

De la Puissance des Lignes.

En multipliant une grandeur, on l'éleve comme par degrez, selon qu'on la multiplie. On nomme Puissances, ces degrez.

DEFINITION I.

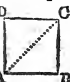
Premiere puissance d'une ligne, c'est la ligne même sans être multipliée. 10

DEFINITION II.

Seconde puissance, ou quarré d'une ligne, c'est son produit, étant multipliée par elle-même. 11

La seconde puissance de b est bb, ou b^2. Ce nombre 2, marque les deux dimensions de bb. Remarquez qu'il y a bien de la difference entre b^2 & $2b$; car cette seconde expression, $2b$, marque que b a été ajouté à lui-même; au-lieu que b^2, fait connoitre que c'est un quarré, ou que b est multiplié par lui-même. Or cela est bien different; car par exemple, 3 & 3, ou 3 ajouté à lui-même, ne fait que 6; au-lieu que 3 fois 3, ou 3 multiplié par lui-même, fait 9.

Lorsqu'on marque une ligne avec deux lettres capitales *A* & *B* à ses extrémitez, son produit, ou sa seconde puissance, qui est le quarré *ABCD*, se marque avec ces quatre lettres, ou par deux seulement, qui sont aux extrémitez de la diagonale, comme sont ici *A* & *C*, écrivant *AC*. Ou on joint la même ligne *AB* avec elle-même par une petite croix de saint André, qui est le signe de la multiplication, ainsi, *AB* × *AB*. Ou enfin on tire une ligne sur *AB*, & on y ajoute le signe de la seconde puissance, de cette maniere, $\overline{AB}^2$. Ainsi $\overline{MN}^2$ est un quarré dont *MN* est le côté, ou qui est faite de *MN* multiplié par *MN*.



AVERTISSEMENT.

Euclide, & les anciens Géometres prenoient le quarré pour la premiere puissance, qui dans le langage des nouveaux Géometres est la seconde. Une grandeur réelle avant que d'être multipliée par elle-même, ou par une autre, a une valeur, ou une puissance.

DEFINITION III.

12 *On appelle racine d'une puissance, la ligne de la multiplication de laquelle s'est fait cette puissance.*

La racine quarrée de *bb* ou de b^2, est une ligne égale à *b*, c'est-à-dire, au côté d'un quarré égal à *bb*.

AVERTISSEMENT.

Lorsque la racine d'une puissance ne se peut exprimer par un nombre, ce qui arrive en certaines occasions, comme on le démontrera, on met devant elle ce signe √ *avec la marque de la puissance; ainsi,* √2, *si c'est une racine quarrée;* √3, *si c'est une racine cube.*

DE-

DEFINITION IV.

Le cube, ou la troisieme puissance d'une ligne, c'est le produit qu'elle fait, lorsqu'elle multiplie son quarré. 13

Le quarré de *b* est *bb*. Si l'on multiplie *bb* par *b*, ce qui fait *bbb*, ce solide ou cube est la troisieme puissance de la ligne *b*. Ce cube *bbb* se peut exprimer ainsi, b^3. Ce nombre 3, en marque les trois dimensions. b^3 est different de $3b$; car $3b$, c'est *b* pris par trois fois, & b^3 est multiplié une premiere fois par lui-même, ce qui produit son quarré *bb* ou b^2; & en second lieu, ce quarré est multiplié par *b*, ce qui fait *bbb*, ou b^3. Prenant 3 fois ce nombre de 4, cela fait 12. Mais prenant le quarré de 4, qui est 16, & le multipliant par sa racine, qui est 4, cela fait 64.

Lorsqu'une ligne comme *AB* est marquée par deux lettres capitales à ses extrémitez, on peut exprimer ainsi sa troisieme puissance ou son cube: $AB \times AB \times AB$, ce qui fait connoitre qu'on a multiplié 1°, *AB* par *AB*, ce qui fait le quarré de *AB*; 2°, qu'on a multiplié ce quarré de *AB* par *AB*, racine de ce quarré. On a abregé cette expression en mettant sur *AB* une ligne avec le petit chiffre, qui marque le nombre de ses dimensions; $\overline{AB}^3$ est le cube de *AB*.

DEFINITION V.

Toute grandeur faite du produit de deux autres, s'appelle Plane. 14

Ainsi *bd* est une grandeur plane, ou un plan, dont une de ces lettres marque la largeur, & l'autre la longueur, c'est-à-dire, ses deux dimensions; $AB \times BC$ est une grandeur plane, ou un plan.

DE-

DEFINITION VI.

15 *Toute grandeur faite du produit de trois autres, s'appelle Solide.*

Ainsi *bcd* est un solide, dont ces trois lettres marquent les trois dimensions. Le produit de deux de ces lettres en marque le plan ou la surface, & la troisieme marque la hauteur, ou l'épaisseur par laquelle le plan a été multiplié.

AVERTISSEMENT.

Par quelque ordre que l'on multiplie deux grandeurs, le produit est toujours égal. ab *&* ba *sont le même plan. Il en est de même de trois ou de plusieurs lignes:* abc, bca, cab, *par quelque ordre qu'on les multiplie, le produit est le même. Dans Euclide, ce mot* rectangle *signifie un plan dont les angles sont droits. Nous supposons que les plans & les solides dont nous allons parler, sont tous rectangles.*

Remarquez aussi, que comme il est d'un très grand avantage d'accoutumer promptement son esprit à ces sortes de calculs, pour la formation des quarrez & des rectangles, on supprimera exprès les figures dont Euclide & ses Interpretes se servent ordinairement pour les démonstrations de plusieurs des premieres Propositions suivantes; & il est à propos de faire actuellement ces calculs la plume en main.

PROPOSITION I.

17 *Si de deux lignes droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra; les rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au rectangle des deux toutes.* Eucl. II. Prop. 1.

Soient *AE* & *AB* deux lignes droites. *AE* est coupée en ses parties *AC*, *CD* *DE*. La ligne *AB* n'est point coupée; il faut prouver que le rectangle des toutes *AB* & *AE* est égal aux

aux rectangles faits de la toute *AB*, & de chacune des parties de *AE*; c'est-à-dire, que $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$.



Les parties étant égales à leur tout, *AE* est la même chose que $AC + CD + DE$. Par conséquent c'est la même chose de multiplier *AB* par *AE* ou par $AC + CD + DE$. Donc $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

Si une ligne droite est coupée comme l'on voudra, les rectangles compris de la toute, & de chacune de ses parties, sont égaux au quarré de la toute. Eucl. II. Prop. 2. 18

Soit la ligne *AB* coupée en deux parties au point *C*. Soit $AB = a$ & $AC = b$, & $BC = d$. Le tout étant égal à ses parties $a = b + d$. Donc multiplier *a* par *a*, & multiplier *a* par $b + d$, c'est faire la même chose; & par conséquent $aa = ab + ad$. C'est-à-dire que le quarré de la toute *AB* ou *aa*, est égal aux rectangles faits de la toute *AB*, & de ses parties *AC* & *CB*; ce qu'il falloit prouver.

A C B

PROPOSITION III.

Si on divise une ligne comme on voudra en deux parties, le rectangle de la toute & de l'une de ses parties, est égal au rectangle des deux parties plus le quarré de la partie premierement prise. Eucl. II. Prop. 3. *même figure.* 19

Soit la ligne *AB* divisée en deux parties, telles qu'on voudra au point *C*, il faut démontrer que $AB \times AC = AC \times BC + \overline{AC}^2$ *.

Soit

* *Sup. n. 11.*

Soit $AB = a$, & $AC = b$, & $BC = d$. Ainsi comme $AC + CB = AB$, de même $a = b + d$. Multipliant donc a & $b + d$ par le même multiplicateur b, les produits seront égaux. $ab = bd + bb$. Or ab, est le rectangle de AB par AC, & $bd + bb$ est le rectangle fait des parties b & d, plus le quarré de la partie b premierement prise; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

20 *Si on divise une ligne comme on voudra en deux parties, je dis que le quarré de toute la ligne est égal au quarré de chaque partie, & à deux fois le rectangle fait d'une partie par l'autre.* Eucl. II. Prop. 4.

Soit la ligne AB divisée en deux parties au point D. Il faut prouver que $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + 2AD \times DB + \overline{DB}^2$.

A D B

Soit $AD = b$, & $DB = d$. Donc $AB = b + d$. Or le quarré de $b + d$, c'est $b^2 + 2bd + d^2$*. Mais $\overline{AD}^2 = bb$ & $\overline{DB}^2 = dd$, & $2AD \times DB = 2bd$. Donc $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION V.

21 *Si l'on divise une ligne en deux parties égales, & en deux parties inégales, le rectangle fait des parties inégales, plus le quarré de la partie du milieu, sont égaux au quarré de la moitié de la ligne.* Eucl. II. Prop. 5.

La ligne AB est divisée également en C, & inégalement en D. Je dis que $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$.

Soit

* *sup. n. 1.*

Soit AC ou CB = a & $C\ D = b$. A C D B

Donc $DB = a - b$ & $AD = a + b$. Or le rectangle de $a + b$ par $a - b$ est $aa + ab - ab - bb$*. Mais $+ ab - ab = 0$; donc ce rectangle est $aa - bb$. Par conséquent $AD \times DB = aa - bb$. Donc ajoutant de part & d'autre bb ou $\overline{CD}^2$ égal à bb, cela sera $AD \times DB + \overline{CD}^2 = aa$; ce qu'il faut prouver.

Pour ajouter bb à $aa - bb$, il ne faut que supprimer $- bb$; car il est évident que $aa - bb + bb = aa$. Ainsi qu'il a été expliqué †.

Proposition VI.

Si une ligne droite est coupée par la moitié, & qu'on lui ajoute directement une autre ligne droite, le rectangle compris de la toute & de l'ajoutée, comme d'une seule ligne & de l'ajoutée, avec le quarré de la moitié de la toute, sont égaux au quarré de la moitié de la toute & de l'ajoutée comme d'une seule ligne. Eucl. II. Prop. 6. 22

La ligne AB est coupée par la moitié au point C. On lui a ajouté directement la ligne droite $B\ D$. Il faut démontrer que $A\ D \times B\ D + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$.

A C B D

Soit AC ou $C\ B = b$. Donc $AB = 2b$, & $\overline{BC}^2$ ou $\overline{AC}^2 = bb$. Soit $BD = d$. Donc $CD = b + d$, & $2b + d = AD$. Partant $AD \times BD = 2bd + dd$; & $AD \times BD + \overline{BC}^2 = 2bd + dd + bb$. Or le quarré de CD ou de b

* *sup. n. 8.* † *sup. n. 6.*

$b+d$ est $bb+2bd+dd$*; Ainsi $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$; ce qu'il falloit prouver, savoir, que le rectangle de $AD \times BD$, plus le quarré de AC ou BC, étoient égaux au quarré de CD.

PROPOSITION VII.

23 *Si on coupe une ligne comme on voudra, le quarré de la toute & celui de l'une des parties sont égaux au quarré de l'autre partie & à deux rectangles faits de la toute, & de la partie premierement prise.* Eucl. II. Prop. 7.

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, au point C. Il faut démontrer que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AB \times BC + \overline{AC}^2$.

Soit $AC = b$. Donc $\overline{AC}^2 = bb$. Soit $BC = d$; donc $\overline{BC}^2 = dd$. De même puisque $AB = b + d$, donc † $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$; & $AB \times BC = bd + dd$. Doublant ces deux grandeurs $2AB \times BC = bd + 2dd$, & leur ajoutant $\overline{AC}^2$ ou bb, viendra $2AB \times BC + \overline{AC}^2 = 2bd + 2dd + bb$, & conséquemment égal à $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; ce qu'il falloit démontrer.

B C A

PROPOSITION VIII.

24 *Si une ligne droite est coupée en deux parties comme l'on voudra, quatre fois le rectangle compris de la toute, & de l'une de ses parties, avec le*

* *sup. n.* 8. † *sup. n.* 8.

le quarré de l'autre partie, sont égaux au quarré de la toute & de la partie premierement prise comme d'une seule ligne. Euclid. II. Proposit. 8. *Même figure.*

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, en deux parties au point C. Il faut démontrer que $4\,AB \times BC + \overline{AC}^2$ est égal au quarré d'une ligne égale à $AB + BC$.

Soit $AC = b$, & $BC = d$. Donc $AB = b + d$, & $AB + BC = b + d + d$, ou $b + 2d$, dont le quarré est $bb + 4bd + 4dd$*, qui sera égal à celui de la ligne $AB + BC$. Or $AB \times BC = bd + dd$, puisque AB vient d'être posé $= b + d$, & $CB = d$: donc $4\,AB \times BC = 4bd + 4dd$, ajoutant d'une part $\overline{AC}^2$,

B C A

& de l'autre son égal bb, on aura $\overline{AC}^2 + 4\,AB \times BC = bb + 4bd + 4dd$, qui est la même valeur qu'on vient de trouver pour le quarré de la ligne $b + 2d = AB + BC$; ainsi le quarré de $AC + 4\,AB \times BC$ sont égaux au quarré de la ligne $AB + BC$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION IX.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales; les quarrez des deux parties inégales sont le double du quarré de la moitié de la toute & du quarré de la partie du milieu. 25
Eucl. II. Prop. 9.

La ligne AB est coupée en deux parties égales en C, & en deux inégales en D. Il faut

* *sup.* n. 8.

faut prouver que $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ eſt double de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$.

Soit AC ou $CB = b$. Soit $CD = d$. Donc $AD = b + d$, & $DB = b - d$. Ainſi $\overline{AD}^2 = bb + 2bd + dd$*; & $\overline{DB}^2 = bb - 2bd + dd$; & $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = bb + 2bd + 2dd - 2bd$. Et puiſque $+ 2bd - 2bd$ ne font rien, donc $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2bb + 2dd$; ce qui eſt le double de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$: ce qu'il falloit prouver.

A C D B

PROPOSITION X.

26 *Si une ligne droite eſt coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoute directement une autre ligne droite, le quarré de la toute & de l'ajoutée comme d'une ſeule ligne, avec le quarré de l'ajoutée, ſont doubles du quarré de la moitié de la toute, & du quarré de ladite moitié & de l'ajoutée, comme d'une ſeule ligne.* Euclid. II. Prop. 10.

La ligne AB eſt coupée par la moitié au point C; & on lui a ajouté la ligne BD. Il faut démontrer que le quarré de $AB + BD$, plus celui de BD ſont le double de celui de BC & de CD; c'eſt-à-dire, que $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ eſt égal à $2\overline{BC}^2 + 2\overline{CD}^2$.

Soit AC ou $BC = b$.

A C B D

Donc $\overline{BC}^2 = bb$, & $AB = 2b$; donc $\overline{AB}^2 =$

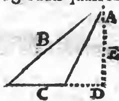
* *Sup. n. 1.*

$= 4bb$. Soit $BD = d$; donc $AD = 2b + d$, & $\overline{AD}^2 = 4bd + 4bd + dd$. Donc le quarré de $AB + BD$, avec le quarré de BD est égal à $4bb + 4bd + 2dd$. Or le quarré de BC ou bb avec celui de $BC + BD$, ou $b + d$, est $2bb + 2bd + dd$, moitié de $4bb + 4bd + 2dd$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XI.

Dans tout triangle ambligone, le quarré du côté qui est la base de l'angle obtus, est égal aux quarrez faits sur les deux autres côtez; plus deux fois le rectangle du côté sur lequel tombe la perpendiculaire (hauteur du triangle) & du prolongement de ce côté jusqu'à cette perpendiculaire. Eucl. II. Prop. 12. 27

Je suppose que le triangle ABC est ambligone, que l'angle ACB est obtus; & que AD hauteur du triangle ABC tombe perpendiculairement sur le côté BC prolongé. Ce qui étant, il faut démontrer que le quarré de AB, base de l'angle obtus ACB, est égal aux quarrez des deux autres côtez AC & BC, plus deux fois le rectangle fait du côté BC & de son prolongement, compris entre l'angle obtus C & la perpendiculaire AD; ce qui s'exprime ainsi : $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.



L'angle ADB étant droit * $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$. Et par la même raison $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$ +

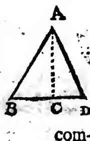
* L. 2, p. 142.

$+ \overline{AD}^2$. Mais $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CD + \overline{CD}^2$ *. Substituant donc cette grandeur en la place de $\overline{BD}^2$; & en la place de $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ la grandeur égale $\overline{AC}^2$, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XII.

28 *Dans tout triangle oxygone ou acutangle, le quarré d'un de ses côtez est égal aux quarrez des deux autres côtez moins deux fois le rectangle fait d'un desdits autres côtez, & d'une de ses parties comprise entre la perpendiculaire qui la coupe, & l'angle opposé au côté premierement pris.* Eucl. II. Prop. 13.

Je suppose que le triangle ABD est oxygone, que AC est une perpendiculaire qui tombe sur le côté BD ; il faut démontrer que le quarré de AB est égal aux quarrez des deux autres côtez AD, & BD moins deux fois le rectangle fait du côté entier BD, & de sa partie DC comprise entre la perpendiculaire AC & l'angle D opposé au côté AB premierement pris; il faut ainsi démontrer $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DC$.



L'angle ACD étant droit $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2$ †. Otant $\overline{DC}^2$ de part & d'autre, vient $\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$. Cette soustraction se fait com-

* *sup. n. 20.* † *L. 1. 142.*

comme on l'a enseigné, effaçant $\overline{DC}^2$, où il étoit avec le signe $+$, & l'écrivant de l'autre côté avec le signe $-$.

Puisque ACB est droit; donc * $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$. Or $BC = BD - DC$: Le quarré de $BD - DC$ est $\overline{BD}^2 - 2BD \times DC + \overline{DC}^2$. Ainsi $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 - 2BD \times DC + \overline{DC}^2$. Mettant donc à la place de $\overline{AC}^2$ & $\overline{BC}^2$ les grandeurs qui leur sont égales, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DC + \overline{DC}^2$. (Et comme $-\overline{DC}^2 + \overline{DC}^2 = 0$.) $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times DC$; ce qu'il falloit démontrer.

SECTION III.

Des raisons & proportions des Lignes, des Surfaces & des Solides.

AVERTISSEMENT.

ON peut considerer ce qu'une ligne est en elle-même, ou ce qu'elle est par rapport à d'autres; lequel rapport fait qu'on dit qu'elle est égale ou inégale, petite ou grande : il en est de même des surfaces, & des solides. Or on peut rapporter une ligne à une autre, & les comparer differemment, considerant ou l'excès de l'une par dessus l'autre, c'est-à dire, leur difference; ou la 1

G *ma-*

* *L.* 2. *n.* 142.

maniere dont l'une contient l'autre ; ce qui fait deux sortes de rapports. Les Géometres ne considerent guere que le second. Aussi lui donnent-ils le nom de Raison, qui en général signifie rapport. C'est des raisons ou de la seconde sorte de rapport, que nous allons parler.

Autrefois les Interpretes d'Euclide définissoient les raisons, une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une avec l'autre selon la quantité. *L'on ne compare les choses entre elles, que lorsqu'elles sont de même genre ; car on ne compare pas la longueur avec la chaleur. Quand on parle de la raison de deux choses, c'est donc leur quantité ou grandeur que l'on compare. Mais le mot d'*habitude *étoit employé ici mal-à-propos.*

Le terme Grec dont Euclide s'est servi, & qu'ils traduisent habitude, *signifie maniere d'être d'une chose à l'égard d'une autre ; & c'est ce que signifie dans la Géometrie le mot de Raison ; mais comme je l'ai dit, c'est de la seconde sorte de rapport qu'il s'agit ; ce que vous allez voir dans les Définitions suivantes.*

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

29 *Raison d'une ligne à une ligne, d'un plan à un plan, d'un solide à un solide ; c'est la maniere dont une ligne contient ou est contenue dans celle avec qui on l'accompare ; qu'un plan contient, ou est contenu dans un plan ; un solide contient ou est contenu dans un solide, avec lequel on le compare.*

C'est par la division qu'on connoit la maniere qu'une grandeur est contenue dans une autre gran-

grandeur. Ainsi pour exprimer le rapport, ou la raison d'une ligne à une autre, comme de la ligne *A* à la ligne *B* on divise *B* par *A*, écrivant comme on l'a marqué l'une sous l'autre, $\frac{B}{A}$ ou $\frac{A}{B}$. Cette expression expose ou exprime la raison de *A* à *B*, c'est-à-dire, combien de fois, & de quelle maniere *A* est dans *B*, ou quelle partie *B*, est de *A*; ce qui se nomme l'Exposant de la raison de *A*, à *B*.

DEFINITION II.

Une raison dont l'exposant se peut exprimer en nombres, s'appelle Raison de nombre à nombre. 30

L'exposant marque la maniere qu'une grandeur est contenue dans une autre, ou qu'elle la contient; c'est-à-dire, en termes d'Arithmetique, quel est le quotient de la division de ces deux grandeurs l'une par l'autre. Si cet exposant ou ce quotient est un nombre, que par exemple la ligne *B* soit en *A* six fois, la raison de ces deux lignes *A* & *B* est une raison de nombre à nombre.

DEFINITION III.

Une raison dont l'exposant ne se peut exprimer par aucun nombre, se nomme Sourde ou Irrationelle. 31

Si on ne peut trouver aucun nombre qui marque exactement combien de fois la ligne *A* contient ou est contenue dans la ligne *B*, la raison de ces deux lignes *A* & *B* est sourde. On démontrera dans la suite qu'il y a de telles raisons.

DEFINITION IV.

32 *L'égalité des raisons se nomme Proportion.*

S'il y a même raison de *A* à *B* que de *C* à *D*, on dit de ces quatre grandeurs qu'elles sont proportionelles ; ce qu'on marque ainsi :

$$A.\ B :: C.\ D.$$

On a dit que la raison de *A* à *B* s'exprime de cette maniere $\frac{A}{B}$; ainsi celle de *C* à *D* de la même façon $\frac{C}{D}$. Par conséquent la proportion de ces quatre lignes, qui consiste dans l'égalité de leurs raisons, se peut aussi exprimer de cette maniere :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

DEFINITION V.

33 *Le premier terme d'une raison se nomme l'Antécédent, l'autre terme le Conséquent.*

L'antécédent c'est la chose qui est rapportée, ou comparée ; le conséquent celle avec qui se fait la comparaison. Toute comparaison suppose deux termes. La raison, qui est un rapport ou comparaison, demande donc deux termes.

DEFINITION VI.

34 *Une proportion à deux antécédens, & deux conséquens.*

La proportion est une égalité de raisons qu'on compare. Chaque raison suppose deux termes. La proportion en demande donc quatre.

DEFINITION VII.

35 *Le même terme dans une proportion peut servir de*

de conséquent & d'antécédent ; & quand cela est, cette proportion se nomme Continue.

Si *A* est à *B* comme *B* à *C*, cela fait deux raisons égales, & par conséquent qui font cette proportion.

A. B : : B. C.

Or *B* sert dans cette proportion de conséquent à la premiere raison, & d'antécédent à la seconde raison. Cette proportion se marque ainsi :

∺ *A. B. C.*

On nomme cette proportion Continue, à cause que les lettres qui la marquent sont de suite, sans interruption.

DEFINITION VIII.

Une proportion continue quand elle a plus de trois termes, s'appelle progression. 36

Si *A* est à *B* comme *B* à *C*, & *B* à *C* comme *C* à *D*, & *C* à *D* comme *D* à *E*, & de suite ; cela s'appelle Progression, qu'on exprime ainsi :

∺ *A. B. C. D. E.* &c.

DEFINITION IX.

Lorsque d'un côté il y a un certain nombre de grandeurs, trois d'une part par exemple, & autant de l'autre, savoir trois : Si en les comparant toutes six, 1°, la premiere avec la seconde, & la quatrieme avec la cinquieme ; 2°, la seconde avec la troisieme, & la cinquieme avec la sixieme, on les trouve en proportion, on dira que cette proportion est ordonnée. 37

Soient *A. B. C* d'un côté, & *D. E. F* de l'autre. Si *A. B : : D. E* & *B. C : : E. F*, cette proportion sera ordonnée.

DEFINITION X.

38 *Trois grandeurs étant d'un côté & trois d'un autre : Si en comparant la premiere avec la seconde, & la cinquieme avec la sixieme, elles sont en proportion : & qu'en changeant d'ordre on compare la seconde à la troisieme, & la quatrieme à la cinquieme & qu'elles soient encore en proportion, alors cette proportion s'appelle Troublée.*

Soient $\left\{ \begin{matrix} A. & B. & C \\ 12 & 8 & 4 \end{matrix} \right.$ & $\left\{ \begin{matrix} D. & E. & F \\ 12 & 6 & 4. \end{matrix} \right.$

Si $A.B :: E.F$ & $B.C :: D.E$, cette proportion se nomme Troublée, à cause qu'on n'y garde pas le même ordre.

DEFINITION XI.

39 *Le premier & le dernier terme d'une proportion, s'appellent les Extrêmes de cette proportion: & le second & le troisieme, les termes Moyens.*

Soit cette proportion $A. B :: C. D$; les extrêmes sont A & D; & B & C les moyens.

DEFINITION XII.

40 *Les termes Omologues d'une proportion sont ceux qui tiennent le même rang, ou qui sont de même nom.*

Dans cette proportion $A. B :: C. D$, les termes A & C qui sont les antécédens, & B & D qui sont les conséquens, sont termes Omologues.

Propositions évidentes touchant les Raisons & les Proportions.

PROPOSITION I.

41 *Les raisons égales ont des exposans égaux.*

L'exposant d'une raison marque la maniere que

que l'un de ces termes est contenu dans l'autre. Si les manieres sont égales, les exposans sont égaux.

PROPOSITION II.

Les grandeurs égales ne peuvent être les exposans que de raisons égales. 42

Soit X l'exposant de la raison de A à B, & de la raison de C à D; ces deux raisons doivent être égales, puisque l'une contient l'autre de la même maniere.

LEMME.

Le premier terme d'une raison devient égal au second, quand on le multiplie par l'exposant de cette raison. 43

Soit A le premier terme ou l'antécédent de la raison de A à B. L'exposant de cette raison, ou ce qui est la même chose, le quotient de la division de ces termes l'un par l'autre q, il marque combien de fois A est dans B, ou quelle partie B est de A. Par conséquent étant pris autant de fois qu'il y est contenu, c'est-à-dire, étant multiplié par q *, il doit devenir égal à B qu'il a divisé. Ainsi $Aq = B$; ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE.

Je suppose presque toujours dans la suite, que ce sera l'antécédent qui sera plus petit. Ainsi l'ayant nommé A *& le conséquent* B, *je dirai que* $Aq = B$; *quoique s'il en étoit au contraire, & que l'antécédent* A *fût plus grand que le conséquent* B, *il soit également vrai de dire, que le terme* A *multiplié par l'exposant de* A *à* B *produira toujours le conséquent* B, *puisque l'exposant peut marquer également la maniere de contenir ou d'être contenu, soit que la raison soit*

 sour-

* *sup. n. 4.*

ſourde ou de nombre à nombre. Ainſi lorſque l'antécédent A *eſt plus petit que le conſéquent* B, *l'expoſant de cette raiſon ſera plus grand que l'unité; & au contraire plus petit (ce qu'on nomme arithmetiquement une fraction) lorſque l'antécédent eſt plus grand que le conſéquent. Mais de quelque maniere que la proportion ſoit ordonnée, le premier terme multipliant l'expoſant de ſa raiſon au ſecond, il produira toujours ledit ſecond terme qu'il avoit diviſé.*

PROPOSITION III.

44 *Quatre termes demeurent en proportion, quelque changement qu'on y faſſe, pendant que le premier antécédent eſt à ſon conſéquent, comme le ſecond antécédent, eſt à ſon conſéquent.* C'eſt la définition même de la proportion.

PROPOSITION IV.

45 *Quatre grandeurs étant proportionnelles,* permutando, *c'eſt-à-dire, les changeant & faiſant que les antécédens deviennent les conſéquens, elles ſeront encore proportionnelles.*

Si *A. B* :: *C. D*, il faut prouver que *B. A* :: *D. C.*

Contenir & être contenu, ſont des termes réciproques. Ainſi ſi *A* contient *B*, comme *C* contient *D*, & par conſéquent qu'il y ait égalité de raiſons, il faut que *B* ſoit contenu dans *A*, comme *D* eſt contenu dans *C*, & qu'ainſi il y ait encore égalité de raiſons. Quand on tire une conſéquence de cette proportion, cela s'appelle conclure *permutando*, ou par raiſon inverſe.

PROPOSITION V.

46 *Quatre grandeurs étant proportionnelles,* alternando, *c'eſt-à-dire, en comparant le premier*

antécédent avec le second antécédent, & le premier conséquent avec le second conséquent, ces quatre grandeurs seront encore proportionnelles. Eucl. V. Prop. 16.

Soit cette proportion $A.B :: C.D$. Il faut prouver qu'*alternando* $A.C :: B.D$. Supposant que q est l'exposant de ces deux raisons * $Aq = B$, & $Cq = D$. Donc au-lieu de $A.B :: C.D$, je puis écrire $A.Aq :: C.Cq$. Il faut donc prouver qu'*alternando* $A.C :: Aq\ Cq$; ce qui est évident: puisque le quotient de C divisé par A est $\frac{C}{A}$, le même que celui de Cq divisé par Aq, qui est $\frac{Cq}{Aq}$. Or selon les règles de la Division †, on peut effacer q qui est au dessus & au-dessous de la ligne, après quoi il ne reste que $\frac{C}{A}$; Ainsi ces deux raisons ayant un même exposant, sont égales.

PROPOSITION VI.

Ajoutant aux deux termes d'une raison deux autres termes de même raison, à l'antécédent de la premiere l'antécédent de la seconde, au conséquent de la premiere le conséquent de la seconde, la même raison demeure. 47

Soit cette proportion $A.B :: C.D$, il faut prouver que $A+C.B+D :: A.B$. L'exposant des raisons de A à B & de C à D est q. Ainsi ‡ $Aq = B$, & $Cq = D$. Il faut donc prouver que $A+C.\ Aq+Cq :: A.B$.

Le quotient de $Aq+Cq$ divisé par $A+C$, est q ‡. Donc ces deux termes $A+C$ & Aq +

* *sup. n.* 43. † *sup. n.* 4. ‡ *sup. n.* 43. ‡ *sup. n.* 4.

$+ Cq$ ayant un même expoſant que A & Aq, ou que A & B, ils ont la même raiſon [a].

PROPOSITION VII.

48 *Retranchant des deux termes d'une raiſon deux autres termes de même raiſon, l'antécédent de l'antécédent, le conſéquent du conſéquent, la même raiſon demeure.*

Soit cette proportion $A\ B :: C.D$, il faut prouver que $A - C.B - D :: A.B$. Si l'expoſant de ces raiſons eſt q: donc $Aq = B$ & $Cq = D$ [b]. Il faut ainſi prouver que $A - C.\ Aq - Cq :: A.B$. Or le quotient de $Aq - Cq$ diviſé par $A - C$ eſt q: donc ces deux termes ont le même expoſant, & partant la même raiſon que A & B.

PROPOSITION VIII.

49 *Quatre grandeurs étant en proportion*, Componendo, *c'eſt-à-dire, le premier antécédent, plus ſon conſéquent, eſt à ſon conſéquent, comme le ſecond antécédent plus ſon conſéquent, eſt à ſon conſéquent.* Eucl. V. Prop. 18.

$A.\ B :: C.D$, il faut démontrer que $A + B.B :: C + D.\ D$. 1°. *alternando* $AC :: B.D$ [c]. Donc ajoutant [d] à A & à B les termes C & D, qui ſont en même raiſon [e] $A + B.\ C + D :: B.D$; & derechef *alternando* $A + B.\ B :: C + D.\ D$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

50 *Lorſque pluſieurs grandeurs ſont en proportion, la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens comme chaque antécédent eſt à ſon conſéquent*, Eucl. V. Prop. 12.

Soit $A.\ B :: C.\ D :: E.F$, il faut prouver que

a *ſup. n.* 41. b *ſup. n.* 43. c *ſup. n.* 46.
d *ſup. n.* 46. e *ſup. n.* 47.

que $A + C + E, B + D + F :: A. B :: C. D :: E. F$. Par la Propoſition précédente $A + C. C :: B + D. D$. *alternando* $A + C. B + D :: C. D$ Or la raiſon de C à D eſt la même, que celle de E à F: donc $A + C. B + D :: E. F$. *alternando* $A + C. E :: B + D. F$: donc encore, ſelon la précédente $A + C + E. B + D + F :: E. F$, ou $A. B$, ou $C. D$; car c'eſt toujours la même raiſon. C'eſt ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION X.

Quatre grandeurs étant en proportion, dividendo, *c'eſt-à-dire, le premier antécédent moins ſon conſéquent, eſt à ſon conſéquent comme le ſecond antécédent moins ſon conſéquent eſt à ſon conſéquent*. Euclide V. Prop. 17. 51

Soit $A. B :: C. D$. Il faut prouver que $A - B. B :: C - D. D$. Puiſque $A. B :: C. D$: donc *alternando* $A. C :: B. D$: donc ôtant B de A & D de C*, $A - B. C - D :: A. C$. Or la raiſon de A à C eſt la même que celle de B à D; ainſi $A - B. C - D :: B. D$. Donc *alternando* $A - B. B :: C - D. D$; ce qu'il falloit prouver.

AVERTISSEMENT.

La raiſon inverſe de la diviſion, c'eſt-à-dire, le changement d'une proportion où l'on concluḋ dividendo, *s'appelle converſion de raiſon: par exemple, ſi* A — B. B :: C — D. D, *en changeant ainſi* A — B. C — D :: B. D. *après ce dernier changement, la proportion demeure encore, comme il eſt évident; & cela ſe nomme* Converſion de Raiſon, *terme qui n'eſt point neceſſaire.*

* *ſup. n. 8.*

PROPOSITION XI.

52 *Deux grandeurs qui ont une même raison avec une troisieme, sont égales entre elles.* Eucl. V. Prop. 9.

Si $A. B :: C. B.$ il faut que $A = C$: car q soit l'exposant de la raison de A à B; il le sera de celle de C à B, qui est la même: donc $Aq = B$, & $Cq = B$*, partant $Aq = B = Cq$. Ces deux grandeurs étant égales à une troisieme, savoir, à B, elles sont égales entre elles par le troisieme Axiome.

PROPOSITION XII.

53 *Deux raisons égales à une troisieme raison, sont égales entre elles.* Eucl. V. Prop. 11.

Si $A. B :: E. F$, & $C. D :: E. F$, il faut prouver que $A. B :: C. D$. Si l'exposant de la raison de A à B est q, celui de la raison de E à F qui est la même, est aussi q. Or celui de C à D est le même, que celui de la raison de E à F. C'est donc encore q. Les deux raisons de A à B, & C à D, ont donc un même exposant; ainsi elles sont égales †.

PROPOSITION XIII.

54 *Lorsque deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison après avoir été multipliées, qu'avant que d'être multipliées.*

On a multiplié A & B par x, il faut prouver que $Ax. Bx :: A. B$. L'exposant de la raison de A à B est $\frac{A}{B}$, & celui de la raison de Ax à Bx est $\frac{Ax}{Bx}$. Or c'est un même exposant; car dans $\frac{Ax}{Bx}$ ayant effacé x qui se trouve au dessus &

* sup. n. 43. † sup. n. 42.

& au dessous de la ligne, reste * $\frac{A}{B}$; partant ces deux raisons ayant un même exposant, elles sont égales †.

PROPOSITION XIV.

Divisant deux grandeurs par une troisieme, les quotiens de ces divisions seront en même raison que ces grandeurs. 55

Soient deux grandeurs B & D. Je les divise par x. Le quotient de B par x soit nommé p, & celui de D par x, soit nommé q; il faut prouver que $p.q::B.D$. Or $px=B$, & $qx=D$; donc $px.qx::B.D$. p & q ayant été multipliez par x, selon la Proposition précédente $px.qx::p.q$. Donc puisque $px.qx::p.q$, il faut que $p.q::B.D$ ‡: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XV.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit ou le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyens. Eucl. VI. Prop. 16. 56

$A.B::C.D$. Il faut prouver que $A\times D=B\times C$. Soit x l'exposant de ces deux raisons égales: donc $Ax=B$ & $Cx=D$; ainsi je puis exprimer cette proportion de la sorte: $A.Ax::C.Cx$. Il faut donc démontrer que $ACx=ACx$; ce qui est evident.

COROLLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen. Eucl. VI. Prop. 17. 57

Soient $\div A.B.C$. Puisque $B.B::B.C$: donc $AC=BB$, ou $AC=B^2$.

 PRO-

* *Sup. n. 4.* † *Sup. n. 4.* ‡ *Sup. n. 53.*

PROPOSITION XVI.

58 *Lorsque quatre grandeurs sont tellement disposées, que le rectangle ou produit des extrêmes est égal à celui des moyens, elles sont proportionnelles.* Eucl. VI. Prop. 16.

Dans ces quatre lignes, $A . B, C, D$ le produit AD des extrêmes est égal à BC produit des moyens: il faut démontrer que $A . B :: C . D$. soit x le quotient de B divisé par A, & z celui de D par C: donc $Ax = B$, & $Cz = D$. Ainsi je réduis ces quatre termes à ceux-ci, $A . Ax$, $C . Cz$. Selon qu'on le suppose $A \times Cz = Ax \times C$. Otant de part & d'autre $A \times C$, restera $z = x$. Par conséquent l'exposant de la raison de A à B est égal à celui de la raison de C à D; ainsi elles sont égales *: par conséquent ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

COROLLAIRE I.

59 *En changeant les quatre termes d'une proportion, pourvu que les deux mêmes termes soient toujours ou les deux extrêmes ou les deux moyens, ils seront toujours rangez proportionellement.*

Soient ces quatre termes $A . B :: C . D$, pourvu que A & D, par exemple, soient toujours ou les deux moyens ou les deux extrêmes, leurs produits seront toujours égaux; par conséquent ils seront proportionnels, selon cette Proposition.

COROLLAIRE II.

60 *Divisant le produit des moyens d'une proportion par le premier, le quotient de la division sera le quatrieme terme; & divisant ce même produit par le quatrieme, le quotient sera le premier.* Car

* *sup. n. 41.*

Car ce quotient, multipliant le diviseur, refait le même produit qui a été divisé *.

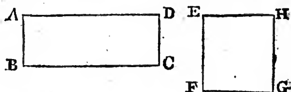
R E M A R Q U E.

Remarquez que ces deux dernieres Propositions & leurs Corollaires sont d'un très grand usage dans la Géometrie, aussi-bien que dans l'Arithmetique, étant le fondement de toutes les Règles de trois, ou de proportion.

D E F I N I T I O N.

Le produit de deux grandeurs étant égal à celui de deux autres (elles peuvent donc faire une proportion,) *si la premiere est à la troisieme, comme la quatrieme est à la seconde, cette proportion se nomme Réciproque, ou Inverse.* 61

Soient ces deux rectangles *AC* & *EG* égaux. si *AB*. *EF* :: *FG*. *BC*, cette proportion se



nommera *Réciproque ou Inverse*, laquelle commence & finit dans la même figure. Si un des côtez de ces deux rectangles est plus grand, l'autre est réciproquement plus petit.

P R O P O S I T I O N XVII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'autres d'un autre côté, lesquelles étant prises de deux en deux soient en même raison; celles-là en raison égale, seront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 22. 62

Soient trois grandeurs *A*, *B*, *C* d'un côté, & trois

* *sup. n. 4.*

trois autres *D*, *E*, *F* de l'autre côté. Si *A*, *B* :: *D*. *E* & *B*. *C* :: *E*. *F*, il faut démontrer qu'en raiſon égale *A*. *C* :: *D*. *F*.

1°. *Alternando*. *B*. *F* :: *A*. *D*, & *B*. *E* :: *C*. *F* [a]: donc les deux raiſons de *A* à *D*, & de *C* à *F* étant égales à celle de *B* à *E*, elles ſont égales [b]: par conſéquent *A*. *D* :: *C*. *F*, & *alternando* *A*. *C* :: *D*. *F*; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVIII.

63 *Si la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſieme à la quatrieme, & la cinquieme à la ſeconde comme la ſixieme à la quatrieme, la premiere plus la cinquieme ſera à la ſeconde, comme la troiſieme plus la ſixieme ſera à la quatrieme,* Eucl. V. Prop. 24.

Soient *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, ſix grandeurs; ſi la premiere *A* eſt à la ſeconde *B* comme la troiſieme *C* eſt à la quatrieme *D*, & la cinquieme *E* à la ſeconde *B* comme la ſixieme *F* à la quatrieme *D*; ce qui s'exprime ainſi:

A. *B* :: *C*. *D*. & *E*. *B* :: *F*. *D*.

Je dis que *A*. + *E* *B* :: *C* + *F*. *D*; car 1°. *alternando* [c], *A*. *C* :: *B*. *D* & *E*. *F* :: *B*. *D*: donc [d] *A*. *C* :: *E*. *F*: donc *A* + *E*. *C* + *F* :: *A*. *C* [e]. Et puiſque *A*. *C* :: *B*. *D*; donc *A* + *E*. *C* + *F* :: *B*. *D* [f], & *alternando* *A* + *E*. *B* :: *C* + *F*. *D*; ce qu'il falloit démontrer.

Propoſitions touchant les Proportions qu'Euclide, dans ſon cinquieme Livre, énonce d'une autre maniere que nous n'avons fait.

Euclide nomme Grandeur multiple, celle qu'une

a *ſup. n.* 46. b *ſup. n.* 53. c *ſup. n.* 46. d *ſup. n.* 53. e *ſup. n.* 47. f *ſup. n.* 53.

qu'une plus petite grandeur mesure exactement tant de fois; & Grandeurs équimultiples; celles qui contiennent un égal nombre de fois la grandeur dont elles sont multiples. Le produit d'une grandeur multipliée par une autre, est le multiple de cette grandeur. Ainsi Ax est le multiple de A; mais A & B ayant été multipliez par le même multiplicateur x, ces deux produits Ax & Bx sont équimultiples de A & B. Les Propositions suivantes ont été démontrées ci-dessus, comme vous l'allez voir. On ne les met donc ici, que parce qu'elles n'ont pas été proposées de la maniere que le fait Euclide, dans son Livre V.

Proposition I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, équimultiples d'autant d'autres grandeurs, chacune à la sienne; comme l'une sera multiple de l'une, ainsi les toutes seront multiples des toutes. 64

J'exprime ainsi cette Proposition: Bx & Cx étant équimultiples de B & de C, je dis que la grandeur Bx est à B & Cx à C, comme $Bx + Cx$ à $B + C$.

1°. $Bx . Cx :: B . C$ *. 2°. *alternando*. $Bx . B :: Cx . C$. 3°. Ajoutant donc à Bx & à B les grandeurs Cx & C, qui sont en même raison †, $Bx . B :: Bx + Cx . B + C$, & $Cx . C :: Bx + Cx . B + C$; ce qu'il falloit prouver.

Proposition II.

Si la premiere est autant multiple de la seconde, que la troisieme de la quatrieme, & la cinquieme autant multiple de la seconde, que la sixieme de la quatrieme; la composée de la premiere & de la cinquieme sera autant multiple de 65

* *sup. n.* 54. † *sup. n.* 47.

de la seconde, que la composée de la troisieme & de la sixieme le sera de la quatrieme.

Si *A. B* :: *C. D*, & que *E. B* :: *F. D*: je dis que *A* + *E. B* :: *C* + *F. D*.

Puisque *A. B* :: *C. D* & *E. B* :: *F. D*; donc *alternando A. C* :: *B. D* & *E. F* :: *B. D*. Ainsi la raison de *A* à *C* est la même que celle de *E* à *F*, ces deux raisons étant la même que celle de *B* à *D* *; Partant *A. C* :: *E. F*. Donc ajoutant *E* avec *A*, & *F* avec *C* † *A* + *E*. *C* + *F* :: *B. D*. Or *alternando A* + *E. B* :: *C* + *F. D*: ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION III.

66 *Si la premiere est autant multiple de la seconde que la troisieme de la quatrieme, & qu'on prenne les équimultiples de la premiere & de la troisieme; le multiple de la premiere sera autant multiple de la seconde, que le multiple de la troisieme le sera de la quatrieme.*

Une grandeur multiple contient celle dont elle est le multiple; ainsi c'est la même chose que si on disoit, si la premiere contient autant de fois la seconde, que la troisieme contient la quatrieme. Ainsi il s'agit de démontrer que si *A. B* :: *C. D*, & que *E* & *F* soient équimultiples de *A* & *C*; c'est-à-dire, que *E* contienne *A* comme *F* contient *C*, qu'ainsi *A. C* :: *E. F*; il faut que *B. D* :: *E. F*. Car puisque *A. B* :: *C. D*; donc *alternando A. C* :: *B*, *D*. Or *A. C* :: *E. F*. Ainsi la raison de *B* à *D* est la même que celle de *E* à *F*, étant égale à une même raison ‡.

PROPOSITION IV.

67 *Si la premiere est à la seconde en même raison que la troisieme à la quatrieme; aussi les équimul-*

* *Sup. n.* 52. † *Sup. n.* 47. ‡ *Sup. n.* 53.

multiples de la premiere & de la troisieme, auront même raison aux équimultiples de la seconde & de la quatrieme, en quelque multiplication que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles se répondent.

Cela veut dire que si $A. B :: C. D$, ainsi *alternando* $A. C :: B. D$; il faut que $A x. C x :: B z. D z$.

Car [a] $A x. C x :: A. C$; & $B z. D z :: B. D$. Mais, $A. C :: B. D$; donc [b] $A x. C x :: B z. D z$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

Si une grandeur est autant multiple d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée; aussi le reste sera autant multiple du reste, que la toute de la toute. 68

Cette Proposition se peut exprimer ainsi: Si $A. B :: E. F$; je dis que $A - E. B - F :: A. B$. Car alors on leur ôte des grandeurs qui sont en même raison: ainsi elles demeurent en même raison [c].

PROPOSITION VI.

Si deux grandeurs sont équimultiples de deux autres grandeurs, & qu'on retranche d'elles des équimultiples, ou les restes seront égaux aux mêmes, ou équimultiples d'elles. 69

J'exprime ainsi cette Proposition. Si $A x. B x :: A x - C. B x - D$; je dis que $A x - C. B x - D :: A. B$.

Cela est évident: car $A x. B x :: A. B$ [d]. Or deux raisons égales à une troisieme, sont égales [e]. Ainsi si $A x. B x :: A x - C. B x - D$; il faut que $A x - C. B x - D :: A. B$.

PRO-

a *sup. n.* 54. b *sup. n.* 53. c *sup. n.* 48.
d *sup. n.* 54. e *sup. n.* 53.

PROPOSITION VII.

70 *Les grandeurs sont entre elles comme sont leurs équimultiples entre elles, étant prises comme elles se répondent.*

Bx. Cx :: *B. C* ou *Bx. B* :: *Cx. C*; c'est ce qui a été prouvé *.

Les autres Propositions du cinquieme Livre d'Euclide, sont dans les endroits qui leur conviennent.

SECTION IV.

Des Raisons Composées, & de leurs Proprietez.

AVERTISSEMENT.

Lorsque l'exposant d'une raison est simple, l'on doit dire de cette raison qu'elle est simple; & qu'elle est composée, si son exposant est fait de l'addition ou de la multiplication de deux ou de plusieurs autres exposans. Par exemple, l'exposant de la raison de A *à* B *soit* 5. *si on considere que ce nombre peut être fait de l'addition de* 2 *& de* 3 *exposans de la raison double, & de la raison triple, on pourroit dire que la raison de* A *à* B *est composée. Si l'exposant de cette raison de* A *à* B *étoit* 6, *nombre qui est fait de deux multiplié par trois; c'est pour lors qu'on doit dire que cette raison est composée, savoir, de ces deux exposans* 2 *&* 3 *multipliez l'un par l'autre. Car l'usage veut que par une raison composée on n'entende qu'une raison dont l'exposant est fait non par l'addition, mais seulement*

* *Sup. n.* 54.

ment par la multiplication de deux ou de plusieurs exposans.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

Les raisons composées sont celles dont les exposans sont faits de la multiplication de deux ou plusieurs exposans. 71

Soit la raison de A à B dont x est l'exposant, & que $x = zy$; alors cette raison de A à B est dite composée des deux raisons, dont z & y sont les exposans.

DEFINITION II.

Une raison composée de deux raisons égales, s'appelle Doublée. 72

Si l'exposant de la raison de A à B est fait de z multiplié par z, c'est-à-dire, si zz est l'exposant de cette raison, elle est doublée.

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un quarré, est une raison doublée. 73

Soit zz, ou z^2, l'exposant de la raison de A à B. Il est fait de z multiplié par z, ainsi de deux exposans égaux: il est donc l'exposant d'une raison doublée.

DEFINITION III.

Une raison composée de trois raisons égales, se nomme Triplée. 74

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un cube, est une raison Triplée. 75

Si le cube zzz, ou z^3 est l'exposant de la raison de A à B, cette raison est triplée; car son ex-

exposant est fait de la multiplication de ces trois grandeurs égales z, z, z.

THEOREME I.

76 *Plusieurs grandeurs étant de suite, la raison de la premiere à la derniere est composée des raisons de toutes les grandeurs qui sont entre les deux extrêmes.*

Soient ces grandeurs A, B, C, D, E, F, &c. Il faut démontrer que la raison de A à C est composée de celles de A à B, & de B à C. Soit x l'exposant de A à B, donc $Ax = B$ *; celui de B à C est z: donc par la même raison Bz, ou $Axz = C$. Ainsi je puis changer les trois grandeurs A, B, C en celles-ci A, Ax, Axz. Je divise Axz par A, le quotient de la division sera xz exposant de la raison de A à Axz, lequel est fait des exposans de ces raisons multipliez l'un par l'autre; partant par la premiere Définition, la raison de A à C est composée de celle de A à B, & de celle de B à C. Par cette méthode je puis démontrer, que la raison de A à F est composée de toutes les raisons des grandeurs interposées.

THEOREME II.

77 *La raison de deux plans est composée des raisons qu'ont les côtez de l'un aux côtez de l'autre, de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur.*

Soient ces deux plans *ab* & *cd*. Il faut démontrer que leur raison est composée de celle de



* *sup. n. 43.*

a à c & de b à d. Soit z exposant de la raison de a à c: donc * $az = c$. Soit x celui de b à d, alors $bx = d$, & $azbx = cd$. Divisant $azbx$ par ab, le quotient sera zx composé de z & de x exposans des raisons de a à c, & de b à d: donc ces deux plans sont en raison composée de celles de a à c & de b à d, c'est-à-dire, de leurs côtez: ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Il faut se souvenir qu'on suppose toujours ici, que tous les Plans & les Solides sont rectangles; ainsi qu'on l'a fait remarquer ci-devant.

THEOREME III.

La raison d'un solide à un autre solide, est composée de la raison qu'ont les trois côtez de l'un aux autres trois côtez de l'autre. 78

Soient deux solides abc & def. Il faut démontrer que leur raison est composée de ces trois raisons $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$. La raison de abc à def, se peut exprimer ainsi $\frac{abc}{def}$. Or cet exposant est fait des trois exposans des raisons, dont il est question de prouver que la raison de ces deux solides est composée. Partant selon la premiere Définition, ces deux solides sont entre eux en raison composée de celles de leurs côtez.

THEOREME IV.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionelles, le produit des antécédens est à celui des conséquens en raison doublée de celles de chaque antécédent à son conséquent, ou comme les quarrez de chaque antécédent au quarré de son conséquent. 79

Soit

* *sup. n.* 43.

Soit $a. b :: c. d$; le produit ac des antécédens, selon la Proposition précédente, est à bd celui des conséquens, en raison composée de celles de a à b & de c à d, qui étant égales, cette raison est doublée [a]. Le quarré aa de l'antécédent a est à bb, quarré du conséquent b, en raison composée des raisons de a à b & de a à b; & par conséquent doublée de ces deux raisons. Or ces raisons sont les mêmes que ces deux raisons de a à b & de c à d. Par conséquent le produit ac est au produit bd, comme le quarré aa est au quarré bb.

COROLLAIRE.

80 *Les plans semblables, c'est-à-dire, dont les côtez sont proportionnels, sont entre eux en raison doublée de celles des côtez de l'un aux côtez de l'autre.*

Leur raison est composée de celles des côtez de l'un, aux côtez de l'autre [b]. Ces deux raisons sont égales. C'est donc une raison doublée [c].

Ainsi tous les quarrez étant des plans semblables, sont en raison doublée de celles de leurs côtez.

THEOREME V.

81 *Lorsque six grandeurs sont proportionnelles, le produit des trois antécédens est à celui des trois conséquens en raison triplée de chaque antécédent à son conséquent, ou comme le cube de chaque antécédent au cube de son conséquent.*

Soient $a. b. c :: d. e. f$; le produit abc est au produit def, en raison composée de celles de a à d, de b à e, & de c à f; [d]. Or ces trois raisons sont égales. Cette raison composée est donc triplée [e]. La raison de aaa cube de a est à ddd cube de d en raison triplée de celle de a à d. Or c'est

a *sup. n.* 72. b *sup. n.* 77. c *sup. n.* 72.
d *sup. n.* 78. e *sup. n.* 74.

c'eſt la même raiſon que celle de *a* à *d*, de *b* à *e*, & de *c* à *f*; par conſéquent les produits dont il eſt queſtion, ſont entre eux comme le cube de chaque antécédent au cube de ſon conſéquent.

Corollaire.

Les ſolides ſemblables, c'eſt à-dire, dont les 82
côtez ſont proportionnels, ſont en raiſon triplée de celles des côtez de l'un au côté de l'autre.

Les côtez de ces deux ſolides ſemblables ſont ſix grandeurs proportionnelles; partant la raiſon de l'un à l'autre eſt triplée.

Ainſi tous les cubes étant des ſolides ſemblables, ſont en raiſon triplée de celles de leurs côtez.

Theoreme VI.

Dans une progreſſion Géometrique, la raiſon de 83
deux termes entre leſquels il y a deux intervalles, eſt doublée; & s'il y a trois intervalles, triplée.

Soit ∻ *A*. *B*. *C*. *D*. La raiſon de *A* à *C* eſt compoſée ou égale à une raiſon compoſée de celle de *A* à *B*, & de celle de *B* à *C* *. Or ces termes étant en progreſſion, ces deux raiſons ſont égales. La raiſon qu'elles compoſent eſt donc une raiſon doublée †. On démontre de la même maniere, que la raiſon de *a* à *d* eſt triplée ‡.

Theoreme VII.

Lorſque des grandeurs ſont proportionnelles, 84
leurs quarrez ſont proportionnels.

Si *a*. *b*: : *c*. *d*.; je dis que *aa*. *bb*: : *cc*. *dd*. Ces quarrez ſont en raiſon doublée de celles de leurs côtez ‡, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée de *a* à *b*, & de *c* à *d*: Et comme ces deux raiſons ſont égales par la ſuppoſition, auſſi celles qu'el-

H les

* *Sup. n. 76.* † *Sup. n. 72.* ‡ *Sup. n. 74.* ‡ *Sup. n. 80.*

les composent sont égales ; la raison de aa à bb, est donc égale à celle de cc à dd ; ainsi ces quarrez sont en proportion.

THEOREME VIII.

85 *Lorsque des grandeurs sont proportionnelles, leurs cubes sont proportionnels.*

Si $a. b :: c. d$; je dis que $aaa. bbb. :: ccc. ddd$: car la raison de a^3 à b^3, & celle de c^3 à d^3 sont triplées des mêmes raisons [a]. Ainsi elles sont égales.

THEOREME IX.

86 *Trois grandeurs étant en proportion continue, le quarré de la premiere est à celui de la seconde, comme la premiere à la troisieme.*

Soient $\div a. b. c$; je dis que $a^2. b^2 :: a. c$. La raison de a à c est composée des deux raisons de a à b & de b à c [b], ces deux raisons sont égales. Ainsi la raison de a à c est doublée [c]. Or la raison de a^2 à b^2 est aussi doublée des mêmes raisons [d]: donc $a^2. b^2 :: a. c$.

THEOREME X.

87 *Quatre grandeurs étant en proportion continue, le cube de la premiere est au cube de la seconde, comme la premiere est à la quatrieme.*

Soient $\div b. c. d. f$. La raison de b à f est composée des trois raisons interposées [e], & ces trois raisons étant les mêmes, cette raison de b à f est triplée [f]. Or le cube b^3 est au cube c^3 en raison triplée de la même raison [g]: donc $b^3. c^3 :: b. f$.

THEOREME XI.

88 *Si trois grandeurs & autant d'autres prises de deux en deux sont en même raison, & en pro-*

a *sup. n.* 82. b *sup. n.* 76. c *sup n.* 72. d *sup. n.* 80. e *sup. n.* 76. f *sup. n.* 74. g *sup. n.* 82.

proportion troublée, ces grandeurs en raison égale seront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 23.

Trois grandeurs *A*, *B*, *C*, & autres *D*, *E*, *F* prises de deux en deux, sont en même raison, mais la proportion est troublée; c'est-à-dire que *A*. *B* :: *E*. *F*, & *B*. *C* :: *D*. *E*. Il faut démontrer que *A*. *C* :: *D*. *F*.

La raison de *A* à *C* est composée de celles de *A* à *B*, & de *B* à *C*. Celle aussi de *D* à *F* est composée de celles de *D* à *E* & de *E* à *F*. Or ces deux raisons le sont de raisons égales: car *A*. *B* :: *E*. *F*; & *B*. *C* :: *D*. *E*; par conséquent les composantes étant égales, les composées sont égales. Ainsi *A*. *C* :: *D*. *F*; ce qu'il falloit démontrer.

SECTION V.

De la comparaison des Raisons.

Eclaircissement touchant la grandeur ou la petitesse d'une Raison.

LEs raisons sont des comparaisons. La raison de *A* à *B*, c'est le rapport de *A* à *B*: Or on peut comparer ces raisons, par exemple la raison de *A* à *B*, avec la raison de *C* à *D*, lesquelles raisons se pourront marquer ainsi, $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$. Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, c'est-à-dire, si ces deux raisons sont égales, c'est une proportion, ou une égalité de raisons. Nous parlerons dans cette Section, de l'inégalité des raisons. Le signe de cette inégalité, c'est $>$ ou $<$. Lors

que l'ouverture de ce ſigne eſt de la droite à la gauche, cela marque que la raiſon eſt plus grande. Ainſi ſi $\frac{M}{N} > \frac{P}{Q}$, que la raiſon de *M* à *N* eſt plus grande que celle de *P* à *Q*. Si l'ouverture du ſigne de l'inégalité eſt de la gauche vers la droite, cela marque que la raiſon eſt plus petite. Si $\frac{M}{N} < \frac{P}{Q}$, que la raiſon de *M* à *N* eſt plus petite que celle de *P* à *Q*.

Il faut d'abord examiner ce qui fait qu'une raiſon eſt plus grande, ou plus petite. Ces mots de grand & de petit, ſont relatifs. Une plus grande raiſon, c'eſt quand la choſe qu'on compare, par rapport au terme de la comparaiſon, eſt plus grande. La raiſon eſt plus petite, ſi cette choſe qu'on compare eſt plus petite, par rapport au terme de la comparaiſon.

L'idée la plus nette & la plus préciſe de la grandeur, & de la petiteſſe, c'eſt que ce qui eſt plus grand contient ce qui eſt plus petit: & plus il le contient de fois, plus il eſt grand. Ce qui eſt contenu eſt d'autant plus petit, qu'il eſt contenu plus de fois. En diviſant l'antécédent d'une raiſon par le conſéquent, le quotient de la diviſion qui expoſe comment ou combien de fois l'un eſt dans l'autre, eſt l'expoſant de cette raiſon, duquel par conſéquent dépend ſa grandeur ou ſa petiteſſe. Quand cet expoſant eſt plus grand, la raiſon eſt plus grande. Mais il faut qu'alors l'antécédent contienne ſon conſéquent, ou ſoit plus grand. Car, comme je le viens de remarquer, plus une grandeur contient celle avec qui on la compare, plus elle eſt grande. Mais ſi au contraire elle étoit contenue, alors plus l'expoſant ſeroit petit, l'antécédent

dent feroit plus grand, ou moins petit; car moins une grandeur est contenue, plus elle est grande. Lorsque, dis-je, l'antécédent est plus grand, ou qu'il contient plus de fois son conséquent, l'exposant de la raison étant plus grand, la raison est plus grande: & si l'antécédent est plus petit que le conséquent, ou s'il est contenu dans le conséquent, l'exposant de la raison étant plus grand, la raison est plus petite.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Faire que deux differentes raisons ayent le même conséquent. 89

Soient ces deux differentes raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Pour faire qu'elles ayent le même conséquent, je les multiplie, l'antécédent & le conséquent de la premiere par le conséquent de la seconde; ce qui produit $\frac{ad}{bd}$. Je multiplie de même l'antécédent de la seconde raison, & son conséquent par le conséquent de la premiere; ce qui produit $\frac{bc}{bd}$. Ainsi les deux raisons proposées sont réduites à celles-ci, $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. Ces deux raisons ont le même conséquent, & cependant conservent toujours le même rapport de l'antécédent à son conséquent *.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

Deux raisons qui ont un même conséquent, sont entre elles comme leurs antécédens. 90

* *sup. n.* 54.

Soient les deux raisons de A à X, & de B à X, qui ont un même conséquent X. Il faut démontrer qu'elles sont l'une à l'autre, comme les antécédens A & B. Je divise A & B par X, & ces deux se trouveront ainsi exprimées; la premiere sera $\frac{A}{X}$ & la seconde $\frac{B}{X}$. Or* A & B étant divisez par un même diviseur X, les quotiens $\frac{A}{X}$ & $\frac{B}{X}$ sont entre eux comme A & B; ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

En réduisant ainsi ces deux raisons $\frac{5}{10}$ & $\frac{2}{12}$ à celles-ci, qui ont un même conséquent $\frac{60}{120}$ & $\frac{20}{120}$, on voit quelle raison elles ont entre elles, que 5 au regard de 10, a une plus grande raison, que 2 au regard de 12. Cela feroit douter qu'il fût vrai que la raison est plus grande, quand l'exposant est plus grand; car divisant 10 par 2 le quotient est 5, qui est plus petit que 6, le quotient de 12 divisé par 2. Mais il faut se souvenir de ce qu'on vient de voir, que quand les antécédens sont plus petits que leurs conséquens; moins l'exposant est grand, la raison est plus grande. 60 n'est contenu que deux fois dans 120, & par conséquent plus grand que 20, qui est contenu six fois.

PROPOSITION III.

THEOREME II.

91 *Si deux grandeurs sont inégales, la plus grande a une plus grande raison à une même grandeur, que la plus petite, & plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande.* Eucl. V. Prop. 8.

Soient

* *sup. n. 55.*

Soient deux grandeurs inégales A & B. La plus grande est A, & C une troisieme, telle qu'elle soit. Il faut démontrer 1°. que la raison de A à C, est plus grande que celle de B à C. J'exprime ainsi ces deux raisons

A B C

$\frac{A}{C}$ & $\frac{B}{C}$, ou $\frac{A\ B}{C.}$ Elles ont un même conséquent; ainsi, selon la Proposition précédente, elles sont comme A & B. Or A est plus grand que B: donc $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$.

2°. Il faut démontrer que la raison de C à B est plus grande, que celle de C à A, que $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je donne à ces deux raisons le même conséquent *, les réduisant ainsi $\frac{ACBC}{AB}$. La raison $\frac{AC}{AB}$ est donc la même que $\frac{C}{B}$; & la raison $\frac{BC}{AB}$, la même que $\frac{C}{A}$ †. Or ces deux raisons $\frac{AC}{AB}$ & $\frac{BC}{AB}$ sont entre elles ‡, comme A est à B. Mais A, selon la Proposition, est plus grand que B: donc la raison de C à B est plus grande, que celle de C à A; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

De deux grandeurs, celle qui a une plus grande raison à une même, est la plus grande; & au contrai- 92

* *Sup. n.* 89. † *Sup. n.* 54. ‡ *Sup. n.* 90. & 54.

traire, celle à laquelle une même a plus grande raison, est la plus petite. Eucl. V. Prop. 10.

Soient A & B deux grandeurs inégales. A a une plus grande raison avec C, que B avec C; ainsi $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ & $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je dis que $A > B$; ce qu'il faut démontrer. 1°. On suppose donc $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$. Or* ces deux raisons sont comme A & B. Il faut donc que $A > B$. 2°. Si $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$ il faut démontrer que B est plus petit que A. Ayant réduit ces deux raisons au même conséquent $\frac{C}{B}$ à $\frac{CA}{BA}$ & $\frac{C}{A}$ à $\frac{CB}{BA}$, selon qu'on le suppose, il faut que $\frac{CA}{BA} > \frac{CB}{BA}$. Or ces deux raisons sont comme A & B †; il faut donc que A soit plus grand, & B plus petit.

PROPOSITION V.

93 *Si la premiere est à la seconde comme la troisieme à la quatrieme, & que la troisieme ait une plus grande raison à la quatrieme, que la cinquieme à la sixieme; aussi la premiere aura une plus grande raison à la seconde, que la cinquieme à la sixieme.* Eucl. V. Prop. 13.

Soient ces six grandeurs, A, B, C, D, E, F, dont les quatre premieres sont en proportion. $A . B :: C . D$, ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Il faut démontrer que si $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$, la raison $\frac{A}{B}$ sera aussi

* *sup. n.* 90. † *sup. n.* 90.

aussi plus grande, que la raison $\frac{E}{F}$. Puisque $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$ sont une même raison; $\frac{C}{D}$ étant plus grande que $\frac{E}{F}$, il faut que $\frac{A}{B}$ soit aussi plus grand que $\frac{E}{F}$.

PROPOSITION VI.

Si la premiere est à la seconde comme la troisieme à la quatrieme, & que la premiere soit plus grande que la troisieme; aussi la seconde sera plus grande que la quatrieme; & si égale, égale; si plus petite, plus petite. Euclid. V. Prop. 14. 94

Soit cette proportion $A. B :: C. D.$ Il faut démontrer que si $A = C$, de même $B = D$; & que si $A > C$, de même $B > D$; & enfin si $A < C$, de même $B < D$.

Alternando $A. C :: B. D$; ce qui ne feroit pas, si comme $A = C$, de même B n'étoit pas égal à D; ou si A étant plus grand que C, B n'étoit pas plus grand que D; ou si A étant plus petit que C, le terme B n'étoit pas aussi plus petit que D.

PROPOSITION VII.

Si trois grandeurs d'un côté & trois d'un autre étant prises de deux en deux sont en même raison, & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisieme; aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme; & si égale, égale; si plus petite, plus petite. Eucl. V. Prop. 20. 95

Soient A, B, C d'une part, & D, E, F de l'autre. Soient $A. B :: D. E$ & $B. C :: E. F$. Si $A > C$; je dis que $D > F$. Si $A < C$, que $D < F$. Si $A = C$, que $D = F$; autrement A

ne seroit pas à *C*, comme *D* est à *F*, ainsi qu'on le suppose, s'il étoit ou plus grand ou plus petit: car deux grandeurs inégales ne peuvent pas contenir de la même maniere une troisieme grandeur, ou y être contenues.

PROPOSITION VIII.

96 *Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, prises de deux en deux, sont en même raison, leur proportion étant sans ordre ; & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisieme: aussi la quatrieme sera plus grande que la sixieme ; & si égale, égale ; si plus petite, plus petite.* Eucl. V. Prop. 21.

Soient A, B, C & D, E, F. Si $A.B::E.F$, & $B.C::D.E$, & que A soit plus grand que C ; je dis que D sera plus grand que F ; si égal, égal ; si plus petit, plus petit : car C, ayant été posé plus petit que A, la raison de C à B est plus petite, que celle de A à B * : donc puisque $B.C::D.E$, & *permutando* $C.B::E.D$, la raison de E à D est plus petite que celle de A à B, ou que celle de E à F, qui est la même. D est donc plus grand que F † ; le reste est aisé.

PROPOSITION IX.

97 *Si quatre grandeurs sont en proportion, la plus grande jointe avec la plus petite, sera plus grande que les deux autres ensemble.* Eucl. V. Prop. 25.

Soient ces quatre grandeurs en proportion $A.B::C.D$. Je suppose A la plus grande & D la plus petite, & je dis que $A+D>B+C$.
Soit X l'excès de A par dessus B, & Z l'excès de C par dessus D ; ainsi $A=X+B$, & $C=Z+D$. Je mets donc ces nouvelles valeurs en pla-

* *Sup. n.* 91. † *Sup. n.* 92.

place de A & de C, & j'ai cette proportion $X + B . B :: X + D . D$, qui est la même que la précédente. Il faut donc démontrer $X + B + D > B + Z + D$. J'en retranche de part & d'autre la grandeur $B + D$; ainsi il ne reste plus qu'à démontrer $X > Z$.

Puisque X est la difference de A à B, & Z celle de C à D, $A - B = X$ & $C - D = Z$. Or $A - B . B :: C - D . D$[a]. Mettant donc X & Z en place de leurs égales, $A - B$ & $C - D$, on aura $X . B :: Z . D$ ou *alternando*[b] $X . Z :: B . D$, & $B . D :: A . C$, suivant la supposition. Ainsi A étant plus grand que C, aussi $X > Z$; ce qui restoit à prouver.

PROPOSITION X.

Les grandeurs faites de grandeurs égales & inégales, sont entre elles comme les inégales. 98

Soient ces deux grandeurs ab & ac, on peut concevoir qu'elles sont faites de b & de c multipliez par a; ainsi $ab . ac :: b . c$[c], de même $abd . acd :: b . c$.

COROLLAIRE.

Ainsi les triangles & les parallelogrammes de même hauteur sont l'un à l'autre comme leurs bases. Eucl. VI. Prop. 1. 99

Les grandeurs des triangles & des parallelogrammes[d] dépendent de leur hauteur & de leurs bases; donc si la hauteur est la même, ils seront comme leurs bases.

a *Sup. n.* 51. b *Sup. n.* 46. c *Sup. n.* 54.
d *L.* 2. *n.* 130. & 135.

ELEMENS DE GEOMETRIE, *OU* DE LA MESURE DE L'ETENDUE.



LIVRE QUATRIEME.

Des raiſons & proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtez & circuit, que de leurs ſurfaces.

SECTION PREMIERE.

Méthode pour trouver & démontrer les raiſons & les proportions des Lignes.

AVERTISSEMENT.



SELON *la notion qu'on a donnée des raiſons & des proportions, il eſt évident que pour démontrer que quatre Lignes ſont en proportion, il faut faire voir que ſi on les diviſoit en deux, ou en trois, ou en tant de parties qu'en voudra; ſi cha-*

chaque partie de la premiere étoit égale à chaque partie de la seconde, chaque partie de la troisieme seroit aussi égale à chaque partie de la quatrieme; si les parties de la premiere étoient plus grande que celles de la seconde, celles de la troisieme seroient plus grandes que celles de la quatrieme; si plus petites, plus petites; & que si chaque partie de la premiere ne se trouvoit pas tant de fois dans la seconde, chaque partie de la troisieme ne se trouveroit pas exactement tant de fois dans la quatrieme. Enfin, que s'il y avoit excès ou défaut, en divisant la premiere & la seconde l'une par l'autre, il y auroit excès ou défaut, en divisant la troisieme & la quatrieme l'une par l'autre. C'est la méthode la plus naturelle, puisque raison n'est que la maniere de contenir, & d'être contenu; & l'on ne sauroit prouver plus sensiblement qu'une premiere Ligne est contenue dans une seconde, comme une troisieme dans une quatrieme, qu'en prouvant de ces quatre Lignes ce que nous venons de dire. C'est la méthode qu'on va suivre.

DEFINITION.

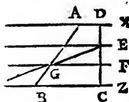
On appelle Espace parallele, celui qui est compris entre deux lignes paralleles. 1

X & *Z* étant deux lignes paralleles, l'espace qu'elles renferment se nomme espace parallele.

LEMME PREMIER.

Si l'on coupe un espace parallele, ou la perpendiculaire qui le mesure, par des lignes paralleles; les lignes obliques comprises dans cet espace seront partagées en autant de parties, que la perpendiculaire. 2

X & *Z* deux paralleles renferment l'espace, que la perpendiculaire *DC* mesure. La ligne

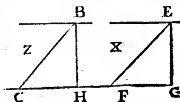


AB est une oblique, comprise dans cet espace, si on divise *DC* en trois parties, menant les deux paralleles *E* & *F*; je dis que ces deux paralleles couperont aussi en trois parties l'oblique *AB*. Ces deux paralleles *E* & *F* divisant tout l'espace parallele, compris entre *X* & *Z*, en trois autres espaces paralleles, dans lesquels se trouve l'oblique *AB*, aussi-bien que *DC*. Ainsi elle est divisée en autant de parties, que la perpendiculaire *DC*; ce qu'il falloit prouver.

Lemme II.

3 *Les lignes obliques, qui dans des espaces paralleles égaux font les mêmes angles, sont égales, & également obliques.*

Soient *Z* & *X* deux espaces paralleles égaux, où les lignes obliques *BC* & *EF* font les angles *BGH* & *EFG* égaux; je dis que ces deux lignes sont égales, & également obliques. Des points *B* & *E*, je mene perpendiculairement les lignes *BH* & *EG*, lesquelles sont égales*; ainsi les triangles *BCH*, *EFG* sont rectangles & entierement égaux †; & partant *BC* & *EF* sont des lignes égales: comme aussi *CH* & *FG*; par conséquent ‡ *BC* & *EF* sont également obliques; ce qu'il falloit prouver.



Lemme III.

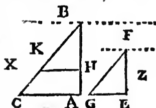
4 *Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans*

* L. 1. n. 65. † L. 2. n. 96. ‡ L. 1. n. 55.

dans des espaces paralleles inégaux, sont inégales; plus grandes, si l'espace est plus grand; plus petites, si l'espace est plus petit.

Les lignes *BC* & *FG* obliques dans les espaces *X* & *Z*, font les mêmes angles. La perpendiculaire *AB* est plus grande que *EF*; ainsi l'espace *X* est plus grand que l'espace *Z*: il faut démontrer que l'oblique *FG* est plus petite que l'oblique *BC*.

Soit pris sur *B A* la partie *B H* égale à *EF*, & par *H* soit menée une parallele à la base *AC*; les deux triangles *ABC* & *EFG* étant rectangles & l'angle *BCA* étant égal à *FGE*, comme on le suppose, ils sont équiangles [a]. L'angle *BKH* est égal à *BCA*, & *BHK* à *BAC* [b]. Ainsi le triangle *BKH* est équiangle avec *B A C*; & partant avec *FG E*. On suppose *FE* égal à *BH*; donc *FG*=*B K* [c]. Or *B K* est partie de *B C*; donc *FG* égale à *BK* est aussi partie de *BC*, & par conséquent plus petite; ce qu'il falloit démontrer.



THEOREME I.

Ayant partagé un espace parallele par deux ou plusieurs paralleles, la perpendiculaire de cet espace & la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement. 5

1°. La ligne oblique sera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme premier [d]. Si par exemple, la perpendiculaire est coupée en cent parties, l'oblique sera aussi coupée en cent parties.

2°. Si les parties de la perpendiculaire sont éga-

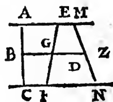
a *L. 2. n. 80.* b *L. 2. n. 27.* c *L. 2. n. 96.* d *Sup. n. 2.*

égales entre elles, celles de l'oblique feront égales entre elles, par le Lemme fecond *: car ces obliques font les mêmes angles fur ces paralleles †; ainfi elles font égales & également obliques, felon ce Lemme. Si les cent parties dans lefquelles la perpendiculaire a été coupée font toutes égales, les cent parties de l'oblique feront donc auffi toutes égales.

3°. Si les parties de la perpendiculaire font inégales, celles de l'oblique, felon le troifieme Lemme, font auffi inégales. D'où il fuit, que fi on prend cent parties égales dans la perpendiculaire, & qu'il refte une partie qui foit ou plus petite ou plus grande, l'oblique fe trouvera divifée, de forte qu'après les cent parties égales, il y aura un refte plus petit, fi le refte de la perpendiculaire eft plus petit; plus grand, fi le refte de la perpendiculaire eft plus grand, comme on l'a prouvé dans le Lemme troifieme. Partant comme la toute fera contenue, ou contiendra la toute, les parties feront contenues ou contiendront les parties. Ainfi, felon la notion des proportions, les deux lignes dont il eft queftion font coupées proportionnellement.

THEOREME II.

6 *Plufieurs lignes obliques étant dans un même efpace parallele, fi on coupe cet efpace par une ligne parallele, ces lignes feront coupées proportionnellement.*



Les lignes obliques *EF* & *MN* font entre deux paralleles, entre lefquelles *AC* eft perpendiculaire. Cet efpace eft partagé par *Z* une parallele: donc par le Théore-

me

* *Sup. n. 3.* † *L. 2. n. 27.*

me précédent *MN. AC* : : *MD. AB* & de même *EF. AC* : : *EG. AB*. Et *alternando MN. MD* : : *AC. AB* : : *EF. EG*. Donc *MN. MD* : : *EF. EG*. Et *permutando*, *MN. EF* : : *MD. EG*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME III.

Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans des espaces paralleles differens, sont entre elles comme ces espaces. 7

Les lignes *BC* & *FG* obliques font les angles *BCA* & *FGE* égaux; par conséquent si *AB* est égal à *EF*, par le Lemme second [a] *BC* = *FG*.

Si *AB* est plus grand que *EF* par le Lemme troisieme [b] *BC* sera plus grand que *FG*.



Si *AB* est par exemple triple de *EF*, alors *BC* sera triple de *FG* : car supposant que *BA* est partagé en trois parties égales; par le Lemme premier [c] *BC* sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par le Lemme second [d] seront chacune égale à *GF*; car ces parties font les mêmes angles [e] : ainsi elles sont également obliques : ainsi *BC* est triple de *FG*, comme nous venons de le démontrer.

Par cette méthode on démontrera que telle partie que *EF* est de *AB*, l'oblique *FG* est partie de l'oblique *BC*; ou que comme *EF* sera contenue en *AB*, aussi *FG* sera contenue en *BC*.

Si *AB* est égal, ou contient une ou plusieurs fois *EF*, plus quelque reste, on démontrera que *BC* est égal ou contient de la même maniere une ou plusieurs fois exactement *FG*, plus quel-

a *sup. n. 3.* b *sup. n. 4.* c *sup. n. 2.* d *sup. n. 3.*
e *L. 2. n. 27.*

quelque reste. Ainsi les lignes également obliques, &c. ce qu'il falloit démontrer.

SECTION II.

Des Raisons & Proportions des côtez des Triangles.

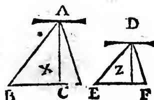
DEFINITION I.

8 DEUX *Triangles sont dits semblables, lorsque leurs côtez sont des angles égaux, ou qu'ils sont équiangles.*

DEFINITION II.

9 *Dans les Triangles semblables que l'on compare, les côtez opposez aux angles égaux sont nommez, Côtez Homologues.*

X & *Z* sont des triangles semblables ou équiangles, chacun de leurs côtez, comme *AB* & *DE* opposez aux angles égaux *C* & *F*, sont nommez Homologues, c'est-à-dire, proportionnels. On va démontrer, que ce nom leur convient.



THEOREME I.

10 *Deux Triangles semblables ont leurs côtez proportionnels.* Eucl. VI. Prop. 4.

Je mene par le sommet des deux triangles *ABC* & *DEF* des lignes paralleles à leurs bases, & de leur sommet j'abaisse sur ces bases les perpendiculaires *X* & *Z*. *Fig. précédente.*

Les angles *ABC* & *DEF* sont égaux; les obliques

ques *AC* & *DF* font auſſi les mêmes angles : Donc *AB. DE* : : *X. Z* : : *AC. DF* [a].

Ainſi *AB. DE* : : *AC. DF*. En menant par *B* & *E* des lignes paralleles aux côtez *AC* & *DF*, on démontrera de la même maniere que *AB. DE* : : *BC. EF*, & qu'ainſi deux triangles ſemblables ont tous leurs côtez proportionnels.

C'eſt pour cette raiſon qu'on appelle Homologues, les côtez qui ſe répondent dans les figures ſemblables ; parce que ces côtez ſont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raiſon ; ce que ſignifie ce mot Homologue.

THEOREME II.

Deux triangles ſemblables à un troiſieme ſont ſemblables entre eux. Eucl. VI. Prop. 21. 11

Soient *A*, *B*, *C* trois triangles. Si *A* & *C* ſont ſemblables à *B*, les angles de *B* ſont égaux à ceux de *A* & de *C* : Donc les angles de *A* & de *C* ſont auſſi égaux les uns aux autres [b]. Ainſi, ſelon la premiere Definition [c], *A* & *C* ſont ſemblables.

THEOREME III.

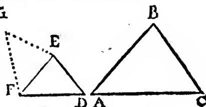
Si deux triangles ont leurs côtez proportionnels, ils ſeront ſemblables. Eucl. VI. Prop. 5. 12

Les côtez des deux triangles *ABC* & *DEF* ſont tels, que *AB. BC* : : *FE. ED*, & *AC. AB* : : *DF. EF*. Je dis que ces deux triangles ſont ſemblables.

Je fais ſur *EF* l'angle *GEF* égal à *ABC*, & l'angle *EFG* égal à *BAC* ; ainſi *EGF* eſt égal à *ACB* [d]. Par conſéquent *EFG* & *ABC* ſont deux triangles ſemblables [e]. Ainſi il ne s'agit plus

a *ſup. n.* 7. b *L.* 3. *n.* 52. c *ſup. n.* 8. d *L.* 2. *n.* 80. e *ſup. n.* 8.

plus que de montrer que les deux triangles *EFG* & *EFD* sont égaux; & qu'ainsi *EFD*, le même que *EFG*, est semblable à *ABC*.



Puisque *EFG* & *ABC* sont semblables, donc *AB*. *BC* :: *EF*. *EG*. Par la supposition, *AB*. *BC* :: *EF*. *ED*: donc *EG* & *ED*, qui ont une même raison avec *EF*, sont égaux [a]. On démontrera de la même maniere que tous les côtez de *EFG*, sont égaux à ceux de *EFD*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

13 *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal, & les côtez qui comprennent cet angle proportionnels.* Eucl. VI. Prop. 6. *même figure.*

L'angle *FED* est égal à *ABC* & *AB*. *BC* :: *FE*. *ED*; je dis que *ABC* & *FED* sont entierement semblables. Pour le prouver, je fais comme ci-dessus le triangle *EFG* semblable à *ABC*, & je montre en la même maniere, que les triangles *EFG* & *DEF* ont égaux: car *AB*. *BC* :: *EF*. *EG* :: *EF*. *ED*. Ainsi *EG* & *ED* ont une même raison avec *EF*: donc ils sont égaux [b]. Or puisque l'angle *DEF* est supposé égal à l'angle *ABC*: donc il l'est à *FEG*, qu'on a fait égal à *ABC*. Ainsi ces deux triangles *DEF* & *GEF*, ayant deux côtez égaux *EG* à *ED*, & *EF* à *EF*, & les angles *FED* & *GEF* que ces côtez comprennent, égaux, ils sont égaux [c]. Donc puisque *DEF* & *CBA* sont semblables à *EGF*, ils sont semblables entre eux [d].

THEO-

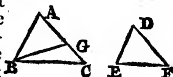
a *L.* 3. *n.* 52. b *L.* 2. *n.* 52. c *L.* 2. *n.* 98. d *sup. n.* 11.

THEOREME V.

Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'un autre proportionnels, les troisiemes angles étant de même espece, c'est-à-dire, ou aigus, ou droits, ou obtus, ces deux triangles sont équiangles; & les angles, dont les côtez sont proportionnels, sont égaux. 14
Eucl. VI. Prop. 7.

Soient ces deux triangles *ABC* & *DEF*, l'angle *A* est égal à l'angle *D*, & les côtez qui comprennent un autre angle proportionnels; je dis que, si *C* & *F* sont de même espece, ces deux triangles sont équiangles; & les angles, dont les côtez sont proportionnels, égaux.

Que *C* & *F* soient 1°, aigus; je dis que ces triangles sont équiangles, savoir que les angles *B* & *E* sont égaux, comme *C* & *F*.

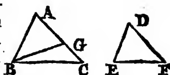


Si *B* est égal à *E*, ces triangles, selon la Proposition précédente, sont équiangles. Mais si *B* est plus grand que *E*, soit fait *ABG* égal à *DEF* [a], dont le troisieme angle *AGB* sera égal au troisieme angle *F* [b], & partant aigu comme lui; & *ABG* & *DEF* seront équiangles, & semblables: ainsi *AB. BG* :: *DE. EF*. Or on suppose que *DE. EF* :: *AB BC*. Ainsi *AB. BG* :: *DE. EF* :: *AB. BC*: donc *BC* & *BG* ayant une même raison avec *AB*, sont égaux [c]: ainsi le triangle *GBC* est isoscele, & par conséquent les angles *BCG* & *BGC* seront aigus [d], & par conséquent *BGA* sera plus grand qu'un droit [e]. Mais l'angle *AGB* a été démontré égal à l'angle

F;

a *L. 2, n. 29.* b *L. 1. n. 75.* c *L. 3. n. 52.*
d *L. 2 n 84.* e *L. 2. n. 17.*

F, qu'on a ſuppoſé aigu; ainſi il ſeroit en même tems plus grand & plus petit qu'un droit; ce qui eſt abſurde.

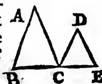


Que *C* & *F* ne ſoient pas aigus: donc *BGC* égal à *C* ne ſera pas aigu; ce qui ne peut pas être[a]. Par conſéquent les angles *ABC* & *E* ſont néceſſairement égaux; ainſi *ABC* & *DEF* ſont entierement équiangles [b]. Donc ſi dans les deux triangles, &c.

THEOREME VI.

15 *Si deux triangles ſemblables ont un point commun, & les côtez homologues paralleles, les deux autres côtez ſe rencontrent directement.* Eucl. VI. Prop. 32.

Soient ces deux triangles ſemblables *ABC*, *DCE*, qui ont un point commun, ſavoir *C*; les côtez *AB* & *DC* ſont paralleles, comme auſſi *AC* & *DE*; je dis que *BC* + *CE* eſt une ligne droite.



Puiſque *AB* & *DC* ſont paralleles, l'angle *BAC* = *ACD*[c], & l'angle *ABC*=*DCE* par la ſuppoſition; donc les trois angles *ACB*, *ACD*, *DCE* ſont égaux aux trois angles *ACB*, *CAB*, *ABC* du triangle *ABC*, leſquels valent enſemble deux droits [d]: donc *BCE* eſt une ligne droite [e].

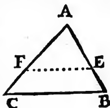
THEOREME VII.

16 *Lorſqu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne parallele à la baſe de l'angle qu'ils com-*

a L. 2. n. 84. b L. 2. n. 80. c L. 2. n. 25.
d L. 2. n. 75. e L. 2. n. 80.

comprennent, ils sont coupez proportionnellement. Eucl. VI. Prop. 2.

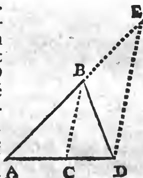
Soit le triangle *ABC*, je mene *EF* parallele à *BC*, je dis que *AE. EB* :: *AF. FC*. Le triangle *AEF* est semblable au triangle *ABC*, puisqu'ils sont équiangles [a]: car outre que l'angle *A* est commun, l'angle *AEF* = *ABC*, & l'angle *AFE* = *ACB* [b]: donc *AB. AE* :: *AC. AF* [c] & *dividendo* [d] *AB* — *AE. AE* :: *AC* — *AF. AF*. Or *AB* — *AE* = *EB*, & *AC* — *AF* = *FC*. Donc *EB. AE* :: *FC. AF*. Permutando, *AE. EB* :: *AF. FC*.



THEOREME VIII.

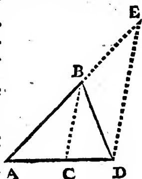
17 *Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, qui coupe aussi la base, les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les deux autres côtez. Et si cela est, la ligne tirée du sommet à la base coupe l'angle en deux également.* Eucl. VI. Prop. 3.

Soit le triangle *ABD*. La ligne *BC* tirée du sommet, coupe l'angle *B* en deux également. Il faut prouver, 1°. que *AB. BD* :: *AC. CD*. Soit mené *DE* parallele à *BC*, & prolongez le côté *AB* jusqu'à ce qu'il rencontre cette parallele. Les angles *ABC* & *AED* sont égaux [e] & par la même raison *CBD* & *BDE* [f]. On suppose *ABC* & *CBD* égaux: donc *CBD* & *BED* seront



a *sup. n.* 8. b *L.* 1. *n* 27. c *sup. n.* 10. d *L.* 3. *n.* 51. e *L.* 2. *n.* 27. f *L,* 2. *n.* 23.

ront aussi égaux, & par conséquent *BDE* & *BED*: ainsi le triangle *DBE*, étant isoscele, *BD* = *BE*. Or *AB*. *AC* :: *BE* (ou *BD*) *CD* [a]. Donc *AB*. *AC* :: *BD* *CD*. & alternando *AB*.*BD*:: *AC*. *CD*.

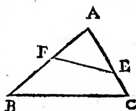


2°. Il faut prouver que si cela est, *BC* coupe *ABD* par la moitié. Puisque supposant comme dessus *DE* parallele à *BC*. & *AB* prolongée en *E*, alors *AB*. *BE* :: *AC*. *CD* [b], & par l'hypothese *AB*. *BD* :: *AC*. *CD*: donc *BE* = *BD* [c], & le triangle *DBE* sera isoscele [d] & aura les angles *BED* = *BDE* [e]; mais à cause des paralleles *BC*, *ED*, les angles *ABC*, *BED* ou son égal *BDE* feront égaux [f], comme aussi *CBD*, *BDE* [g]: donc l'angle *ABC* = *CBD*; ce qu'il falloit prouver.

DEFINITION I.

18 *Les lignes antiparalleles sont celles qui sur les lignes qu'elles coupent font bien les mêmes angles, mais c'est d'un autre côté.*

Les lignes paralleles font les mêmes angles d'un même côté, avec les lignes qu'elles coupent [h]. Si *AFE*=*ABC*, les lignes *FE* & *BC* seroient ainsi paralleles; mais si *AFE* = *ACB*, ces lignes sont antiparalleles.



THEO-

a *sup. n.* 16. b *sup. n.* 16. c *L.* 3. *n.* 52.
d *L.* 2. *n* 57. e *L.* 2. *n.* 83. f *L.* 3. *n.* 27.
g *L.* 2. *n.* 25. h *L.* 2. *n.* 27.

THEOREME IX.

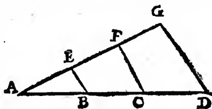
Lorsqu'on coupe les côtez d'un triangle par une ligne antiparallele à sa base, les côtez de ce triangle sont coupez en proportion réciproque. Même Figure. 19

FE est antiparallele à *BC*: ainsi *AFE* = *ACB*, & *AEF* = *ABC*. Le triangle *AEF* a donc les mêmes angles que *ABC*, & par conséquent ils sont semblables, & leurs côtez sont proportionnels *; mais leurs côtez homologues n'ont pas la même situation, car *AB* n'est pas homologue avec *AF*, mais avec *AE*: ainsi ces côtez *AB* & *AC* ne sont pas coupez dans une proportion droite. *AB* n'est pas à *AF* comme *AC* à *AE*; de sorte que de ces quatre grandeurs, la premiere est à la quatrieme comme la troisieme à la seconde. *AB*. *AE* : : *AC*. *AF*.

PROBLEME I.

Couper une ligne droite semblablement à une ligne qui est déja coupée. Eucl. VI. Prop. 10. 20

La ligne *AD* est coupée en trois parties *AB*, *BC*, *CD*: on propose de couper la ligne *AG* en trois parties proportionnelles à celles de *AD*. Je joins *AG* avec *AD*; de sorte qu'elles fassent un angle, quel qu'il soit. Après je mene par les points *G* & *D* une ligne droite, & à celle-ci des paralleles par les points *B* & *C* de la coupée. Les paralleles coupent *AG*, en trois parties, qui sont proportionnelles à celles de *AD*: car † *AD*. *AC* : : *AG*. *AF*, & *AC*. *AB* : : *AF*. *AE*: ainsi on a fait ce qui étoit proposé.

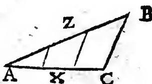


* *Sup. n.* 10. † *Sup. n.* 16.

PROBLEME II.

21 *Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.*

La ligne donnée est *X*, qu'il faut diviser en trois parties : je la joins avec *Z* une ligne infinie: de sorte qu'elles fassent l'angle *ZAX*, n'importe de quelle grandeur. Ayant ouvert le compas au hazard, & mis une de ses pointes sur *A*, je marque sur *Z* de suite avec la même ouverture trois parties égales : après de *B*, extrémité de ces trois parties, je mene une ligne au point *C*, extrémité de *X*; & à celle-ci, des paralleles par les divisions de *Z*; selon ce qu'on vient de démontrer dans le Problême précédent, *AC* sera divisé semblablement en *AB*, c'est-à-dire, en trois parties.



PROBLEME III.

22 *Retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra.* Eucl. VI. Prop. 9.

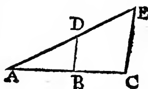
Si de *AC*, *fig. précéd.* on veut retrancher la troisieme partie, il n'est question que de diviser *AC* en trois parties, suivant le Problême précédent, & retrancher de *AC* une de ces trois parties.

PROBLEME IV.

23 *Deux lignes étant données, trouver une troisieme qui soit à la seconde, comme celle-là est à la premiere; ou à deux lignes données trouver une troisieme proportionnelle.* Eucl. VI. Prop. 11.

La premiere ligne est *AB*, la seconde *BC*; je joins ces deux lignes de sorte qu'elles ne fassent qu'une ligne droite : ensuite je prens *AD* égale à *BC*, que je joins avec *AB*, de sorte qu'el-

qu'elles fassent un angle quel qu'il soit. Je mene de *D* une ligne sur *B*, & à celle-ci une parallele par le point *C*: je prolonge *AD* jusqu'à ce qu'elle rencontre la parallele *E*; ce qui



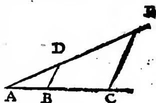
étant fait, je dis que *DE* est la troisieme proportionnelle cherchée.

Car [a] *AB* est à *AD* ou à son égale *BC*, comme *AC* est à *AE*; & partant [b] comme *AC* — *AB* est à *AE* — *AD*, c'est-à-dire, comme *BC*, est à *DE*; ainsi ∺ *AB*. *BC* *DE*; ce qui étoit proposé.

PROBLEME V.

Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes qui sont en proportion. Eucl. VI. Prop. 12. 24

La premiere est *AB*; la seconde *AD*, avec lesquelles je fais l'angle quel qu'il soit *BAD*; la troisieme est *BC* que je joins avec *AB*, de sorte que toutes deux fassent une ligne droite: après je mene par *B* & *D* une ligne droite, & à celle-ci par le point *C* la parallele



CE: je prolonge *AD* jusqu'à ce qu'elle rencontre cette parallele *CE*; ce qui étant fait, je dis que *DE* est la quatrieme proportionnelle: car [c] *AB*. *AC* : : *AD*. *AE*; ainsi *dividendo* [d] *AB*. *AC* — *AB* : : *AD*. *AE* — *AD*; c'est-à-dire, que *AB*. *BC* : : *AD*. *DE*, & par conséquent *alternando* *AB*. *AD* : : *BC*. *DE*.

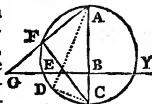
PROBLEME VI.

Trouver toutes les réciproques possibles à deux lignes données. 25

I 2 Soient

a *sup. n.* 16. b *L.* 3. *n.* 48. c *sup. n* 16. d *L.* 3. *n.* 48.

Soient les deux lignes données *AB* & *AC* : il faut prendre *AB*, la plus petite, sur la plus grande *AC*, & faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre ; ensuite du point *B* où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indéfinie, comme *Y*.



Toute ligne qu'on menera de *A* qui coupera l'indéfinie, & se terminera au cercle comme *AD*, ou qui coupera le cercle & se terminera à l'indéfinie, satisfera au Problême. *AE* & *AD* sont réciproques à *AB*, *AC*, comme aussi *AF* & *AG* : car *BE* est antiparallele à *DC*, puisque *AEB* = *ACD*, & *ABE* = *ADC* [a] : ainsi ces lignes sont coupées réciproquement [b]. *AFC* = *ABG* [c] & *ACF* = *AGE* [d] : donc *BG* & *FC* sont antiparalleles ; ainsi *AC* & *AG* sont coupées réciproquement.

PROBLEME VII.

26 *Sur une ligne donnée décrire une figure semblable à une figure donnée.* Eucl. VI. Prop. 18.

Il n'est question que de réduire cette figure donnée en triangles [e], & sur la ligne donnée mener des lignes qui fassent les mêmes angles [f], & forment de semblables triangles.

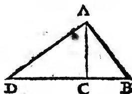
LEMME I.

27 *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base, cette ligne le partagera en deux autres triangles semblables, & à lui, & entre eux.* Eucl. VI. Prop. 8.

Soit *ABD* un triangle rectangle. Si de *A* l'angle

a *L.* 2. *n.* 52 & 39. b *sup. n.* 18. c *L.* 2. *n.* 52 & 39. d *L.* 2. *n.* 39. & 53. e *L.* 2. *n.* 122. f *L.* 2. *n.* 29.

gle droit on mene *AC* une perpendiculaire ſur la baſe *BD*, je dis que les trois triangles *ABD*, *ABC*, *ACD* ſont tous trois ſemblables.



1°. Ils ſont tous rectangles. 2°. Les deux triangles *ABD* & *ABC* ont l'angle *B* commun : ainſi ils ont tous leurs angles égaux [a], & par conſéquent ſemblables [b]. Les triangles *ABD* & *ADC* ont auſſi l'angle *D* commun ; ils ſont donc auſſi ſemblables. Puiſque *ABC* & *ADC* ſont ſemblables à un troiſieme, ils ſont ſemblables entre eux [c]. Par conſéquent les trois triangles rectangles *ABD*, *BCA*, *CAD* ſont ſemblables.

THEOREME X.

Lorſque dans un triangle rectangle on mene 28
une perpendiculaire de l'angle droit de l'hypothénuſe ; voilà ce qui arrive :

1°. *La perpendiculaire eſt une moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuſe.*

2°. *Le côté majeur eſt un moyen proportionnel entre l'hypothénuſe, & la plus grande partie.*

3°. *Le côté mineur eſt un moyen proportionnel entre l'hypothénuſe & la plus petite partie.*

Par le Lemme précédent, le triangle rectangle *ABD*, eſt diviſé par la perpendiculaire *AC* en deux triangles rectangles qui lui ſont ſemblables & entre eux ; de ſorte que *ABD*, *CBA*, *CAD* ſont trois triangles ſemblables. Partant

[d] 1°. *BC.AC* : : *AC.CD*, ou ∺ *BC.AC.CD*.

2°. *CD.AD* : : *AD.BD* ou ∺ *CD.AD.BD*.

3°. *BC.AB* : : *AB.BD* ou ∺ *BC.AB.BD* ; ce qu'il falloit démontrer.

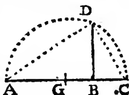
a *L.* 2. *n.* 80. b *ſup. n.* 8. c *ſup. n.* 11. d *ſup. n.* 20.

PROBLEME VIII.

29 *Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle.* Eucl. VI. Prop. 13.

Premiere maniere.

Les deux lignes données ſont *AB* & *BC*; je les joins de ſorte qu'elles faſſent une ligne droite, du milieu de laquelle, qui eſt *G*, & de l'intervalle de ſa moitié, ſavoir de l'intervalle *AG*, je décris un demi cercle; j'éleve enſuite ſur *B* une perpendiculaire, que je prolonge juſques à ce quelle ſe termine dans la circonference du cercle, ſavoir, au point *D*; je dis que *BD* eſt moyenne entre *AB* & *BC*.

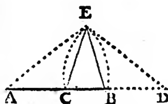


L'angle *ADC* dans le demi cercle eſt droit*: par la conſtruction *BD* eſt perpendiculaire: donc par le Theorême précédent *BD* eſt moyenne proportionnelle entre *AB* & *BC* ou ∻ *AB*. *BD*. *BC*.

Seconde maniere.

AB & *CB* ſont deux lignes données; je prolonge *AB* de ſorte que *BD* = *AC* : & de *D* & de *A*, comme centres, & d'intervalles égaux *AB* & *CD*, je fais deux cercles qui ſe coupent en *E*: la ligne *EB* ou *EC* ſera la moyenne entre *AB* & *CB*.

Par la conſtruction *AB* = *AE*, & *CE* = *BE* : donc *EAB* & *CEB* ſont deux iſoſceles; ils ont l'angle commun *ABE*: donc ces deux iſoſceles ſont



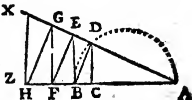
* L. 2. n. 44.

ſont équiangles [a], & partant ſemblables [b] : donc *AB*. *BE* : : *BE*. *BC*, ou ∺ *AB*. *BE*. *BC* [c].

PROBLEME IX.

Ayant les trois premieres lignes d'une progreſſion géométrique de lignes, trouver les autres à l'infini. 30

Soient trois lignes en progreſſion. La premiere eſt *AC*, la ſeconde *AD*, la troiſieme ligne eſt *AB*, que je partage par la moitié; & de l'intervalle de cette moitié, je décris un demi cercle. Je prens ſur cette ligne *AB* une partie égale à la première ligne *AC*; & ſur *C* j'éleve une perpendiculaire qui ſe termine à la circonference du cercle au point *D*, d'où je mene une ligne au point *B*, & de *A* par *D*, une ligne infinie *X*. Je prolonge auſſi à l'infini la ligne *AB*, que je nomme *Z*; enſuite j'éleve au point *B* une perpendiculaire qui coupe *X* au point *E*, duquel je mene une perpendiculaire qui coupe *Z* au point *F*, où je dreſſe une perpendiculaire qui coupe *X* au point *G*, d'où j'abaiſſe une perpendiculaire *GH*, & ainſi de ſuite.

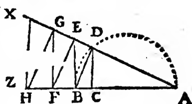


1°. La ligne *AD* étant moyenne proportionnelle entre *AC* & *AB* [d], eſt égale à la ſeconde ligne donnée, qui ſe trouve ainſi, ſi elle n'étoit pas donnée.

2°. Tous les triangles *ADB*, *ABE*, *AEF*, *AFG*, &c. ſont équiangles [e], puiſqu'outre leur angle commun *XAZ*, ils ſont tous rectangles; car l'angle *ADB* dans le demi cercle eſt droit [f], & par la conſtruction *EF* & *HG* ſont perpendi-

a *L. 2. n. 85.* b *ſup. n. 8.* c *ſup. n. 10.* d *ſup. n. 28.*
e *L. 2. n. 80.* f *L. 2. n. 44.*

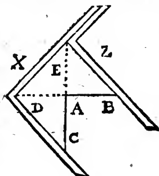
culaires sur *X*, comme *DC BE Gr* le sont sur *Z*: ainsi, suivant la Définition * ils seront semblables, & auront leurs côtez



homologues proportionnels †: donc *AC*. *AD* :: *AD*. *AB*, & *AD* *AB* :: *AB*. *AE*, & *AB*. *AE* :: *AE*. *AF* & *AF* *AG* :: *AG*. *AH*, &c. par conséquent ∺ *AC*. *AD*. *AB*. *AE*. *AF*. *AG*. *AH*, &c.

31 *Jusqu'à présent on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la seule règle, deux moyenne proportionnelles entre deux lignes données. On les trouve mécaniquement.*

Les lignes données sont AB & AC, *qu'on joint de sorte qu'elles fassent un angle droit. On dispose l'équerre* X *de maniere, que son angle soit sur le prolongement de* AB, & *qu'une de ses règles rase* C *extrémité de* AC.

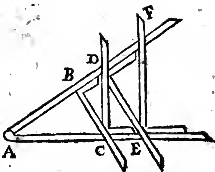


Z *est une seconde équerre qu'on dispose, en sorte qu'une de ses règles rase* X, & *l'autre le point* B *extrémité de* AB: *ainsi les triangles* CDE & DEB, *sont rectangles*, & DA & EA *sont des perpendiculaires; ainsi* ‡ ∺ AC. AD. AE. & ∺ AD. AE. AB: *donc* ∺ AC. AD AE. AB.

Cette invention est de Platon. Descartes en propose une autre, avec laquelle il trouve entre deux

* *Sup. n. 8.* † *Sup. n. 10.* ‡ *Sup. n. 21.*

deux lignes données autant de proportionnelles, qu'on en veut. L'instrument dont il se sert est composé de plusieurs équerres, qui sont tellement ajustées les unes avec les autres,



que lorsque l'angle FAE *est fermé, ou que les deux règles* FA *&* AE *se touchent, toutes les autres règles* BC, CD, DF, EF *se touchent & viennent au point* A : *si cet angle* EAF *s'ouvre, ces mêmes règles se poussent & se chassent.*

Deux lignes étant donc données, je pousse la règle BC, *de sorte que* AB *soit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle* EAF *de sorte que la règle* DE *soit éloignée de* A *de la grandeur de la seconde ligne.*

Il est évident que AC *&* AD *seront deux moyennes proportionnelles entre* AB *&* AE.

Pour trouver plusieurs moyennes proportionnelles, il faut augmenter le nombre des équerres.

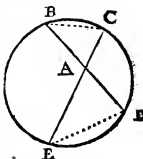
THEOREME XI.

Deux cordes qui se coupent dans un cercle, ont leurs parties en proportion réciproque. 32.

Soient les deux lignes, *BD*, *CE* qui se coupent au point *A*, il faut prouver que *BA. CA* : : *AE. AD*.

Soient tirées *BC*, *ED*; elles formeront les deux triangles semblables *BAC*, *EAD*;

car les angles en *A* sont égaux, & l'angle *B* est égal à l'angle *E*, puisqu'ils s'appuyent sur le même arc *CD*; donc ils ont leurs côtez homologues proportionnels *. Donc *BA. CA* :: *AE. AD*. Donc *alternando* réciproquement *AB* est à *AE*, comme *CA* à *AD*; ce qu'il falloit prouver.

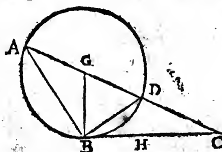


Lemme II.

33 *Si d'un point hors d'un cercle on lui mene une tangente & une sécante, cette tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entiere, & sa partie hors le cercle.*

Soit la tangente *CB* & la sécante *CA*; il faut prouver que *AC. CB* :: *CB. CD*, ou ÷ *AC. CB. CD*.

Les deux triangles *ACB* & *DCB* ont l'angle *C* commun. L'angle *DBC* a pour sa mesure la moitié de l'arc *BD* †. Cette moitié est aussi la mesure de l'angle *BAC* ⁑: ainsi les deux triangles *ACB* & *BDC* ayant deux angles égaux, & par conséquent le troisieme, ils sont semblables, & proportionnels ‡: le côté *DC* du triangle *BCD* est



* *sup. n.* 10. † *L.* 2. *n.* 37. ⁑ *L.* 2. *n.* 39. ‡ *sup. n.* 8. & 10.

eſt homologue avec le côté *BC* du triangle *ACB* : ainſi *AC*. *BC* : : *BC*. *CD*, ou ∺ *AC*. *BC*. *CD* ; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME X.

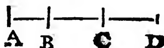
Diviſer une ligne en telle ſorte, que la plus grande partie ſoit moyenne proportionnelle entre la plus petite & la toute : ce qui s'appelle Moyenne & Extrême raiſon. Eucl. VI. Prop. 30. 34.

La ligne donnée eſt *BC* ; au point *B* j'éleve la perpendiculaire *BG*, qui ſoit la moitié de *BC*. De l'intervalle de *GB*, je fais un cercle dont le diametre ſera par conſéquent égal à *BC* ; je tire la ſécante *AC* : après quoi ayant pris *CH* ſur *BC*, égale à *CD*, je dis que la ligne *BC* ſera diviſée au point *H*, comme il eſt requis. Si *HC* ou *DC* eſt la plus grande partie, & *BH* ou *BC* — *HC* la plus petite ; il faut démontrer que ∺ *BC*. *CH*. *HB* Par le Lemme précédent, *AC*. *BC* : : *BC*. *CD*, & retranchant de *AC* & *BC* les lignes *BC* & *CD*, les reſtes *AC* — *BC* & *BC* — *CD* feront encore en même proportion * : ainſi *BC*. *CD* : : *AC* — *BC*. *BC* — *CD*. Mais par la conſtruction *AC* — *BC* = *DC* = *HC*, & *BC* — *HC* = *HB* : ainſi ∺ *BC*. *CH*. *HB* ; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Une ligne étant coupée en moyenne & extrême raiſon, ſi on lui ajoute la médiane, c'eſt-à-dire la plus grande partie, cette nouvelle ligne ſera encore diviſée en moyenne & extrême raiſon, dont la premiere ſera la médiane. 35.

* *L*. 3. *n*. 48.



Soit AC une ligne divisée en moyenne & extrême raison au point B. La médiane ou la plus grande partie est BC, que j'ajoute à cette ligne, faisant que CD soit égale à BC. Il faut prouver que $\div AD.\ AC.\ CD$.

Soit $AC = a$, & $CB = x$; donc $a - x = AB$. & $CD = x$, & $a + x = AD$. Il faut donc prouver que $\div x.\ a + x.\ a.\ x$.

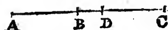
Par l'Hypothese $a.\ x :: x.\ a - x$.

Permutando $x.\ a :: a - x.\ x$.

Componendo $x + a.\ a :: a - x + x.\ x$. Mais $a - x + x = zero$. Donc $x + a.\ a :: a.\ x$, ou $\div x + a.\ a.\ x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE II.

36 *Une ligne étant divisée en moyenne & extrême raison, si on retranche de la médiane la plus petite partie, le reste sera encore divisé en moyenne & extrême raison.*



La ligne AC est divisée en moyenne & extrême raison, au point B. Sa plus petite partie est AB. Il faut prouver, que si de BC on retranche $DC = AB$, le reste AD sera divisé selon la même raison; c'est-à-dire, que $\div AD.\ AB.\ BD$. Soit $AB = y$, $BC = x$, $BD = x - y$. Donc $AC = y + x$. Il faut ainsi démontrer que $\div x - y.\ y.\ x$.

Se-

Selon l'Hypothese $y. x :: x. y + x$.

Permutando $x. y :: y + x. x$.

Dividendo $x - y. y :: y + x - x. x$. Et comme $+ x - x = 0$: donc $x - y. y :: y. x$. Ainsi $\div x - y. y. x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

Du premier Corollaire il est aisé de conclure que lorsqu'on a une ligne divisée en moyenne & extrême raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes divisées en moyenne & extrême raison, si on ajoute à la toute la médiane : Et par le second Corollaire, qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes divisées en moyenne & extrême raison, en retranchant la plus petite de la médiane. 37

SECTION III.

Des Raisons & Proportions que les circuits de deux ou plusieurs figures ont entre eux ; & avec les rayons des cercles, où ces figures sont inscrites.

DEFINITION.

Deux figures rectilignes sont dites semblables, lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun, & que les côtez qui les comprennent sont proportionnels. 38

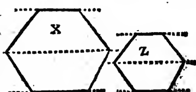
COROLLAIRE.

Il s'ensuit que toutes les figures regulieres de même nom sont semblables : car étant de 39

même nom, elles auront même nombre de côtez & d'angles; & à cause de la régularité, tous ces angles seront égaux aussi-bien que les côtez qui les comprennent *, & partant proportionnels en raison d'égalité; ainsi suivant cette Définition, elles seront semblables.

THEOREME I.

40 *Les circuits de deux figures semblables sont entre eux en même raison, que leurs côtez chacun à chacun.*



Soient *X* & *Z* deux hexagones, chaque côté de *X* est *a*; ainsi tout son circuit est 6 *a*, chaque côté de *Z* est *b*, & tout son circuit par conséquent est 6 *b*. Or 6 *a*. 6 *b* : : *a*. *b* †.

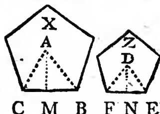
THEOREME II.

41 *Les circuits de deux figures régulieres & semblables, sont entre eux comme les rayons ou diametres des cercles où elles sont inscrites, & comme leurs apothêmes.*

X & *Z* sont deux polygones réguliers & semblables. Du centre du cercle où ils sont inscrits, je mene les lignes *AB* & *AC*, *DE* & *DF*, qui sont rayons. Les deux triangles *BAC* & *DEF* sont isoscéles par la construction; & puisque ces deux figures sont semblables, les angles de leurs centres *BAC* & *EDF* sont les mêmes; ainsi ces triangles sont semblables : donc *AB*, ou le rayon de *X* est à *DE*, rayon de *Z*, comme *BC* à *EF*. Or le cir-

* *L.* 2. *n.* 106. † *L.* 3. *n.* 54.

circuit de X est à celui de Z par le Théorême précédent, comme BC & BF: donc le circuit de X est à celui de Z, comme le rayon de X à celui de Z, ou comme le diametre de l'un est au diametre de l'autre; car les rayons & les diametres ont entre eux une même raison, les rayons étant la moitié des diametres.



Soit AM une perpendiculaire sur BC, elle sera l'apothéme de X *. De même soit DN perpendiculaire de D sur EF, elle sera l'apothême de Z. Or selon ce qu'on a prouvé † BC sera à EF comme l'apothême de X est à Z; ainsi le circuit de X est à celui de Z, comme l'apothême de X à l'apothême de Z.

COROLLAIRE.

Les circonferences de deux cercles sont entre elles, comme les diametres ou rayons de ces cercles. 42

Les cercles peuvent être considerez comme des polygones réguliers: or les circuits de deux polygones sont entre eux comme leurs diametres: donc les circuits ou circonferences des cercles sont entre elles comme les diametres des cercles; & par conséquent puisque les rayons sont la moitié des diametres, comme les rayons de ces cercles.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'autres cercles concentriques, dont les circonferences soient déployées & dressées comme des lignes droites, le rayon du grand cercle & son circuit feront

* *L. 2. n.* 144. † *sup. n.* 10.



ront un triangle rectangle, dans l'hypothénuse duquel les extrémitez des cercles concentriques aussi déployez doivent se trouver, puisqu'ils sont entre eux comme les parties du rayon du cercle qu'ils coupent. C'est pourquoi l'on a conclu de-là, que la surface du cercle étoit égale à un tel triangle. Ce que nous avons démontré par une autre voye *.

THEOREME III.

43 *Les arcs d'égale quantité de degrez dans differens cercles, sont entre eux comme ces cercles dont ils sont les parties.*

Les degrez sont les parties proportionnelles d'un tout; ils sont donc entre eux comme les touts dont ils sont les parties; c'est-à-dire, comme les cercles dont ils sont les degrez.

THEOREME IV.

44 *Les cordes d'arcs semblables, dans differens cercles, sont entre elles comme les arcs dont elles sont les cordes.*

Concevant que du centre des cercles où sont ces cordes one ait mené des lignes à leurs extrémitez, on aura des triangles semblables, puisque ces cordes d'arcs semblables ont les angles au centre égaux: ces cordes sont donc entre elles comme les rayons de ces cercles; &

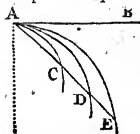
* L. 2. n. 154.

& partant comme ces cercles, qui sont entre eux comme leurs rayons *. Or les arcs d'égale quantité de degrez sont entre eux, comme les cercles dont ils sont parties, par le Theorême précédent; ces cordes sont donc entre elles comme les arcs dont elles sont les cordes.

THEOREME V.

Si d'un point où plusieurs cercles se touchent, on mene une ligne qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne seront entre elles comme les cercles qu'elle coupe. 45

A est un point où se touchent plusieurs cercles. Soit mené de *A* une ligne qui coupe les cercles *C*, *D*, *E*; il faut prouver que les parties *AC*, *AD*, *AE* de cette ligne seront entre elles, comme les cercles qu'elles coupent. Par *A* je mene *AB*, qui touche ces cercles; ainsi l'angle *BAE*, a pour mesure ou l'arc *CA*. ou *AD*,



ou *AE* †, ainsi ces trois arcs sont semblables. Les cordes *AC*, *AD*, *AE*, par le Théorême précédent d'arcs semblables, sont entre elles, comme les arcs *AC*, *AD*, *AE*; & ces arcs sont entre eux comme leurs cercles; les parties de ladite ligne seront donc entre elles, comme les cercles qu'elle coupe.

THEOREME VI.

Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles qui ont leur sommet, soit dans la circonference, soit dans le centre, sont entre eux com- 46

* *Sup. n.* 42. † *L.* 2. *n.* 87.

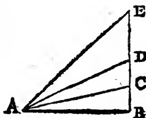
comme les arcs sur lesquels ils sont appuyez. Eucl. VI. Prop. 33.

Cela est bien évident, puisque ces arcs en sont les mesures *.

Lemme.

47 *Dans un triangle rectangle divisant un des angles aigus en tant de parties égales qu'on voudra, & menant des lignes droites sur le côté opposé, les parties de ce côté les plus éloignées de la perpendiculaire, sont les plus grandes.*

Soit *ABE* un triangle rectangle, dont l'angle *BAE* est divisé en tant de parties égales qu'on voudra par des lignes droites menées du point *A* jusques à *BE*. Il faut prouver que les parties de *B E* les plus éloignées de *AB*, seront les plus grandes. Que la partie *DC* est plus grande que *CB*, & *ED* plus grande que *DC*.



Puisque, suivant l'hypothese, l'angle *BAC* a été fait égal à l'angle *CAD*, l'angle *BAD* sera divisé en deux; & suivant ce qui a été démontré †, *DC*. *CB* :: *AD*. *AB*. Or ‡ *AD* > *AB*; donc *DC* > *CB*.

Par la même raison si l'angle *CAE* est divisé en deux, que *CAD* soit égal à *DAE*; alors *ED*. *DC* :: *AE*. *AC*; & puisque *AE* > *AC*: donc *ED* > *DC*. Ainsi les parties de *BE* les plus éloignées de *AB* seront les plus grandes.

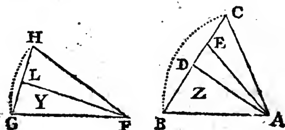
Theo-

* *L.* 2. *n.* 10. & 39. † *sup. n.* 17. ‡ *L.* 3. *n.* 59.

THEOREME VII.

De deux Polygones réguliers inscrits dans les mêmes, ou en differens cercles, celui qui a plus de côtez a un plus grand apothême, à raison de son circuit. 48

Soient deux Polygones *Z* & *Y*. Je suppose que *Y* a deux fois plus de côtez que *Z*; qu'ainsi si *BC* est une corde de 20 degrez, *GH* sera de 10; c'est-à-dire, que si *Z* a 18 côtez, *Y* en aura 36.



AD est l'apothême de *Z* [a], & *FL* l'apothême de *Y*. On suppose l'angle *BAC* double de *GFH*; ainsi *DAC* est égal à *GFH*. Ayant donc partagé également en deux l'angle *DAC*, l'angle *DAE* sera égal à *DFH*.

Ces deux triangles *LFH* & *DAE* sont rectangles, & ont les angles *LFH*, *EAD* égaux; ils sont donc équiangles [b], & semblables [c]; ainsi *LH*. *LF* :: *DE*. *DA* [d]. Le Polygone *Y* est de 36 côtez; ainsi 72 *LH* est son circuit. Je multiplie par le même nombre *DE*. Si *DE* étoit la quatrième partie de *BC*, alors 72 *DE* seroient justement le circuit du Polygone *Z*, qui a 18 côtez, & contient 18 fois *BC*;

a *L. 2. n.* 144. b *L. 2. n.* 10. c *sup. n.* 8. d *sup. n.* 10.

BC; mais par le Lemme précédent, *DE* eſt plus petit que *EC*, partant moindre que la quatrieme partie de *DC*; 72 *DE* ſeront donc moindres que le circuit de *Z*, que je nomme *m*; partant 72 *DE* auront moindre raiſon à *DA*, que non pas *m*, qui eſt plus grand *. Mais comme il vient d'être démontré, *LH*. *LF* :: *DE*. *DA*, auſſi † 72 *LH*. *LF* :: 72 *DE*. *DA*; partant 72 *LH* auront moindre raiſon à l'apothême *LF*, que le dit *m*, circuit du Polygone *Z* à *DA* ſon apothême; ce qu'il falloit prouver.

La precedente démonſtration bien entendue, ſe peut appliquer generalement à tous autres Polygones, non ſeulement en raiſon multiple des côtez, mais auſſi en quelque proportion que ce ſoit, comme de 5 à 13, ou telle autre qu'on voudra, laquelle ne peut jamais être que de nombre à nombre; ainſi au-lieu que dans l'exemple propoſé l'angle DAC *eſt double de* DAE, *il ſeroit ici comme 13 à 5; & on pourra le ſuppoſer être diviſé en 13 parties égales, dont l'angle* DAE *en contient 5: & par le même Lemme les cinq portions de la partie* DE *plus près de la perpendiculaire* DA, *ſeront toujours à proportion plus petites, que les 13 de la ligne* DC; *& ainſi 26 fois* DE *ſeront toujours moindres, que dix fois* DC *qui ſont les circuits des Polygones, dont le nombre des côtez eſt 13 & 5,* DE *&* DC *n'étant chacune qu'une moitié de leurs côtez; & partant on conclura toujours, comme ci-devant, ce qui a été propoſé.*

Corollaire I.

49 *De deux Polygones de même circuit, l'apothême de celui qui a plus de côtez eſt plus grand.*

Soient

* *L. 3. n. 91.* † *L. 3. n. 54.*

Soient deux Polygones *Z* & *Y*, qui ont un même circuit *m*. L'apothême de *Z* qui a moins de côtez soit *b*, celui de *Y* qui en a plus soit *d*. Par le présent Theorême *b* est plus petit, au regard de *m*, que *d* au regard de *m*; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE II.

Un cercle d'un même circuit qu'un Polygone, a son rayon plus grand que l'apothême de ce Polygone. 50

Un cercle est un Polygone d'une infinité de côtez, qui a pour apothême son rayon; qui est ainsi plus grand que l'apothême d'aucun autre Polygone, selon le Corollaire précédent.

SECTION IV.

Des Raisons & des Proportions des Surfaces.

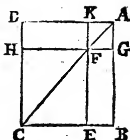
THEOREME I.

EN *tout parallelogramme, les parallelogrammes adjacens, ou qui sont autour du diametre, sont semblables entre eux, & au parallelogramme entier.* Eucl. VI. Prop. 24. 51

Soit *ABCD* un parallelogramme, dont le diametre est *AC*, autour duquel soient deux autres parallelogrammes *AGFK* & *CEFH*. 1°. Chacun d'eux a un angle commun avec *ABCD*. Les angles opposez dans les parallelogrammes sont égaux *: Donc *GAK* = *ECH* = *HFE*, & *KAG* = *KFG*. Ainsi ces trois parallelogrammes

* *L.* 2. *n.* 119.

rallelogrammes ayant deux de leurs angles égaux, les autres le sont aussi; car leurs côtez étant paralleles, ils font les mêmes angles [a]. Les triangles *B*[illegible], *AGF*, *FE*[illegible] sont donc équiangles, par conséquent semblables[b], comme aussi *ADC*, *AKF*,

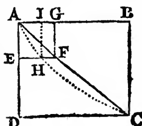


FHC: donc [c] *AG*. *GF*:: *AB*. *BC*, & *AG*. *AF*:: *AB*. *AC*, & *AF*. *AK*:: *AC*. *AD*. De même *AK*. *AG*:: *AD*. *AB*. Donc *AKFG* & *ABCD* sont semblables. De même *CEFH*, & *ABCD* sont semblables [d].

THEOREME II.

52 *Si d'un parallelogramme on retranche un parallelogramme semblable, semblablement posé au total, & ayant un angle commun avec lui, le parallelogramme retranché sera à l'entour du diametre du parallelogramme total.* Eucl. VI. Prop. 26.

Soit du parallelogramme *ABCD* retranché le parallelogramme *AGFE*; ils sont semblables, & ont l'angle *EAG* commun. Il faut prouver que leurs diametres sont dans la même ligne. Si on le nie, & qu'on dise que le diametre *AHC* coupe *EF* au point *H*; je mene *HI*, parallele à *AE*. Les parallelogrammes *EI* & *DB* sont semblables [e]. Donc *AE*. *EH* :: *AD*. *DC*:: *AE*. *EF* [f]. Donc *EH* = *EF* [g]. Ainsi



a L. 2. n. 27. b *sup. n.* 8. c *sup. n.* 30. d *sup. n.* [illegible]. e *sup. n.* 1. f *sup.* [illegible]. g [illegible] 52.

Ainsi la partie est égale à son tout; ce qui est absurde.

THEOREME III.

Lorsqu'une ligne est coupée en moyenne & extrême raison, le rectangle de la toute & de la petite partie est égal au quarré de la médiane. 53

Soit la ligne AB coupée en moyenne & extrême raison. La médiane est AD. Donc $AB . AD :: AD . DB$, ou $\div AB . AD . BD$.

A D B

Donc $\overline{AD}^2 = AB \times DB$ *; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Couper une ligne droite de telle sorte, que le rectangle de la toute & de l'une de ses parties, soit égal au quarré de l'autre. Euclid. II. Prop. 11. 54

Il ne s'agit que de couper la ligne donnée en moyenne & extrême raison, ainsi qu'il a été enseigné †. Le rectangle de la toute & de la petite partie, est égal au quarré de la médiane, selon ce Théorême.

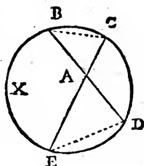
THEOREME IV.

Si dans un cercle deux lignes droites se coupent, le rectangle compris des deux parties de l'une, est égal au rectangle compris des deux parties de l'autre. Eucl. III. Prop. 35. 55

Les deux cordes BD & CE du cercle X se

* *L.* 3. *n.* 57. † *Sup. n* 34.

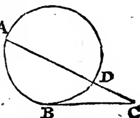
se coupent au point *A*. Il faut prouver que $BA \times DA = CA \times EA$. On a prouvé a que $BA. AE :: AC. AD$. Donc $BA \times AD$, produit des extrêmes, $= AE \times AC$ produit des moyennes b; ce qu'il falloit démontrer.



THEOREME V.

56 *Si d'un point pris à discretion hors du cercle, on tire deux lignes droites, dont l'une le touche & l'autre le coupe, & va se terminer à sa circonference concave, le rectangle compris de toute la coupante & de la partie hors du cercle, sera égal au quarré de la touchante.* Euclid. III. Prop. 36.

De *C*, un point hors le cercle, soient menées deux lignes droites, *CB*, qui touche le cercle, & *CA* qui le coupe. Il faut prouver que $AC \times CD = \overline{BC}^2$. On a démontré c que $\div AC. BC. DC$: Donc $AC \times CD = \overline{BC}^2$; ce qu'il faloit prouver.



COROLLAIRE. I.

57 *Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on mene tant de lignes droites que l'on voudra, qui coupent le cercle & qui aillent se terminer à sa circonference concave; le rectangle compris d'une*

a *sup. n.* 32. b *L.* 1. *n.* 56. c *sup. n.* 33. *L.* 3. *n.* 57.

d'une de ces coupantes, telle que l'on voudra, & de sa partie hors du cercle, sera égal au rectangle compris de telle autre coupante que l'on voudra, & de sa partie hors du cercle.

Car chacun de ces rectangles est égal au quarré de la couchante, qui seroit mené de ce même point.

COROLLAIRE II.

Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on mene deux lignes droites qui le touchent, elles seront égales entre elles. 58

Car le quarré de chacune de ces tangentes est égal au rectangle d'une coupante & de sa partie hors du cercle; & ainsi chacun de ces quarrez est égal à l'autre: d'où il suit que les lignes qui en sont les côtez, sont égales.

THEOREME VI.

Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on mene deux lignes droites, dont l'une coupe le cercle & va se terminer à sa circonference concave, & l'autre atteint le cercle; & que le rectangle compris de toute la coupante & de la partie hors du cercle soit égal au quarré de celle qui atteint le cercle, celle-ci touchera le cercle. Eucl. III. Prop. 37. 59

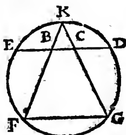
Soit la même figure que ci-dessus. Puisque le quarré de cette ligne qui atteint le cercle, est égal au rectangle $AC \times DC$, elle sera égale à la tangente BC, dont le quarré est égal à ce rectangle; ce ne peut donc pas être une ligne differente, elle est donc tangente: ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

Si d'un point dans la circonference d'un cercle on mene deux lignes à la circonference concave, & par des points également éloignez du point 60

 don-

donné, on mene une troisieme qui coupe les deux lignes; le rectangle fait de l'une & de sa partie comprise entre le point donné & la troisieme ligne, est égal au rectangle fait de l'autre ligne & de sa partie, comprise de même entre le point donné & la troisieme ligne.

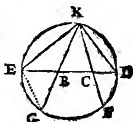


Soit *K* un point dans la circonference du cercle, d'où soient menées les lignes *KF* & *KG*, & par les points *E* & *D* également éloignez de *K*, la ligne *ED*. Il faut prouver que $KF \times KB = KG \times KC$. Les deux lignes *BC* & *FG* sont antiparalleles; car l'angle *KBC* a pour sa mesure la moitié de l'arc *EF*, plus celle de *KD* ou de son égale *KE* [a]. Or la moitié de *KF* est aussi la mesure de *KGF* [b]: donc $KBC = KGF$. Par le même raisonnement $KCB = KFG$. Ainsi, selon la Définition des antiparalleles [c], *FG* & *BC* sont antiparalleles. Donc $KF. KC :: KG. KB$ [d]. Donc $KF \times KB = KG \times KC$ [e]; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

61 Les mêmes choses que dessus étant posées, il s'ensuit non-seulement que si du point *K* on tire des lignes à l'infini, terminées à la circonference concave, & coupées par la droite *ED* comme *KF* ou *KG*, tous les rectangles qui en seront faits en la maniere ci-dessus, seront égaux entre eux, puisque prenant ces lignes deux à deux, ils seront chacun égaux au rectangle $KF \times KB$; mais encore, que si du point *K* on tire la droite *KE*, le quarré de ladite *KE* sera égal à cha-

a L. 2. n. 52. b L. 2. n. 39. c *sup.* n. 18.
d *sup.* n. 19. e L. 3. n. 56.



chacun de cesdits rectangles; car ayant tiré la droite *EF*, il se formera toujours deux triangles semblables tels que *FKE*, *EKB* dont l'angle *K* sera commun, & les deux autres angles aussi égaux; savoir *BFK* à *KEB*, & *FEK* à *EBK* [a], chacun étant appuyé sur égales circonferences du cercle, ainsi ils auront leurs côtez homologues proportionnels [b]; & partant *FK*. *KE*:: *KE*. *KB*: donc le rectangle $FK \times KB$ égal au quarré de *KE* [c]. Et il s'ensuit aussi, que si la ligne *ED* est un diametre du cercle, la ligne *KE* sera le côté du quarré inscrit dans le cercle [d], auquel chacun des rectangles faits desdites lignes tels que $FK \times KB$ ou autres, seront égaux.

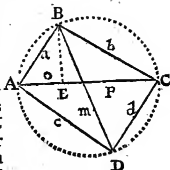
THEOREME VIII.

Si l'on inscrit un quadrilatere dans un cercle, le rectangle fait des diagonales est égal a la somme des rectangles faits des côtez opposez. 62

Soit le quadrilatere *ABCD*, dont les diagonales sont *AC* & *BD*. Il faut prouver $AC \times BD = BC \times AD + AB \times DC$. Soit menée *BE*, en sorte que l'angle *ABE* soit égal à *CBD*, & qu'ayant retranché l'une & l'autre de l'angle *ABC*, les restans *CBE* & *ABD* soient égaux; ainsi comme les angles *ADB* & *ACB* appuyez sur le même arc sont égaux [e], les triangles *BDA* & *BCE* sont équiangles [f], & semblables [g]. Donc *BD*. *AD*:: *BC*. *CE* [h]; ainsi le rect-

a *L. 2. n. 43.* b *sup. n. 10.* c *L. 3. n. 56.*
d *L. 2. n. 124.* e *L. 2. n. 40.* f *L. 2. n. 89.*
g *sup. n. 8.* h *sup. n. 10.*

rectangle des extrêmes est égal à celui des moyennes: & par conséquent $BD \times CE = AD \times BC$ [a].



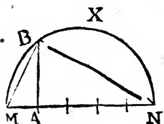
Par les mêmes raisons que dessus, les triangles BDC & BAE sont semblables : car $ABE = DBC$ par la construction, & $BAC = BDC$ étant appuyez sur le même arc BC, ils auront donc aussi leurs côtez homologues proportionnels. Donc $BD.\ CD :: AB.AE$. Ainsi $BD \times AE = CD \times AB$ [b]. Or $BD \times AE + BD \times CE = BD \times AC$ [c]. Donc puisque $BD \times AE = CD \times AB$ & $BD \times CE = AD \times BC$, il faut donc que $CD \times AB + AD \times BC = BD \times AC$, deux choses égales à une troisieme, étant égales entre elles. Or c'est ce qu'il falloit démontrer.

Theoreme IX.

63 *Si on coupe le diametre d'un cercle, en sorte qu'une partie soit quadruple de l'autre, & que sur ce point de division on éleve une perpendiculaire terminée à la circonference; je dis que le quarré de la corde menée de l'extrémité de ce diametre à l'extrémité de la perpendiculaire, est égal à cinq fois celui de la petite partie de ce diametre, dont celui de la perpendiculaire est le quadruple.*

Soit le diametre MN du cercle X partagé en A, en sorte que $AN = 4\,AM$. Si l'on éleve la perpendiculaire AB & qu'on mene les cordes MB, BN, formant le triangle rectangle MNB [d]; je dis que $\overline{MB}^2 = 5\,\overline{AM}^2$. Soit $AM = 1$:

a L. 3. n. 56. b L. 3. n. 56. c L. 3. n. 17. d L. 2. n. 44.



$= a$: donc, selon la supposition, $MN = 5a$. Soit $MB = b$: donc $\div 5a.b.a$ [a], partant $bb = 5aa$ [b]. Soit maintenant $BA = d$; ainsi $\div a.d.4a$ [c]. Donc par la même raison $4aa = dd$. C'est ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

Le diametre MN *étant partagé en tant de parties que l'on voudra, le quarré de* MB *sera égal à autant de fois celui de chacune de ses parties, qu'il y a de parties.* 64

Si, *comme ci-dessus & même figure*, MN est divisé au point A, de sorte que AM soit la cinquieme partie de MN, ou telle autre qu'on voudra, on aura toujours [d] $\div MA.MB.MN$, ou $\div 5a.MB.a$: donc aussi le quarré de MB est égal $5aa$ [e].

COROLLAIRE II.

Le quarré de BA *est égal à autant de fois le quarré de chacune de ses parties, qu'il y a de parties moins une.* 65

Fig. précéd. Car supposant toujours la même division, ou autre à volonté, on aura de même cette proportion $\div AM\ BA.AN$, ou $\div a.BA.4a$ [f]: donc $4aa$ ou $5aa - aa$ est égal au quarré de AB [g]. Ce qu'il falloit prouver, que le quarré de AB est égal à autant de fois le quarré de chacune des parties, qu'il y a de parties moins une.

 THEO-

a *sup. n.* 28. b *L.* 3. *n.* 57. c *sup. n.* 28. d *sup. n.* 28. e *L.* 3. *n.* 57. f *sup. n.* 28. g *L.* 3. *n.* 17.

THEOREME X.

66 *Si une ligne est coupée en moyenne & extrême raison; je dis que le quarré fait de la grande partie, jointe à la moitié de la ligne, vaut cinq fois le quarré de cette moitié.* Eucl. XIII. Prop. 1.

Soit BA divisé en moyenne & extrême raison au point C, & $AB = 2\,a$, & $BC = b$: donc $CA = 2\,a - b$. Il faut démontrer que le quarré de $a + b$ (qui est $aa + 2\,ab + bb$) est égal $5\,aa$. Otez aa de part & d'autre, il restera seulement à prouver que $2\,ab + bb$ est égal à $4\,aa$.

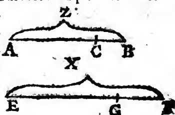
B C A

Par la supposition $2\,a.\ b :: b.\ 2\,a - b$*: donc $bb = 4\,aa - 2\,ab$ †, & ajoutant de part & d'autre $2\,ab$, viendra $bb + 2\,ab = 4\,aa$ ‡; ce qu'il restoit à prouver. Ainsi remettant aa de part & d'autre qu'on avoit premierement ôté, viendra $aa + bb + 2\,ab = 5\,aa$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

67 *Deux lignes droites coupées en moyenne & extrême raison, sont semblablement coupées.* Eucl. XIV. Prop. 2.

Soient ces deux lignes Z & X coupées en moyenne & extrême raison aux points C & G. Ainsi $Z.\ AC :: AC.\ CB$, & $X\ EG :: EG.\ GF$. Soit $AC = a$, & $CB = c$, & $EG = m$, & $GF = n$. Il faut démontrer que $AC.\ CB :: BG.\ GF$, ou que $a.\ c :: m.\ n$. Comme le quarré de la moitié de



* *sup. n. 34.* † *L. 3. n. 57.* ‡ *L. 3. n. 6.*

de Z jointe avec a est égal à cinq fois le quarré de la moitié de z; de même celui de la moitié de X avec m, est égal à cinq fois celui de $\frac{1}{2} X$. Ainsi ces quarrez étant proportionnels, leurs côtez le feront aussi *, puisqu'ils sont en raisons sousdoublées. Partant $\frac{1}{2} Z + a. \frac{1}{2} Z :: \frac{1}{2} X + m. \frac{1}{2} X$; & en divisant † $a \frac{1}{2} Z :: m. \frac{1}{2} X$, & doublant les conséquens & changeant ‡ $Z. a :: X. m$; mais par la supposition $\div Z. a. c.$ & $\div X. m. n$: donc ces deux lignes sont coupées proportionnellement ‡; ce qu'il falloit démontrer.

Theoreme XII.

Une ligne ayant été coupée en deux parties 68
inégales, si le quintuple du quarré de la moitié est égal au quarré fait de cette moitié joint la plus grande partie, cette ligne se trouvera coupée en moyenne & extrême raison, dont cette partie sera la médiane. Eucl. XIII. Prop. 2.

Soit AB une ligne coupée en C, en deux parties inégales. Soit $AB = 2a$, & $AC = b$; ainsi $CB = 2a - b$. Il faut démontrer que si cinq fois le quarré de a, moitié de AB, est égal au quarré fait de $a + b$, c'est-à-dire, au quarré de la moitié a avec b; ce que j'exprime ainsi $5aa = aa + 2ab + bb$; la ligne AB aura été divisée en moyenne & extrême raison, & AC ou b en sera la plus grande partie. Pour le prouver il faut montrer, que si AB est ainsi divisée, $5aa = aa + 2ab + bb$.

A C B

Supposons donc que $\div 2a. b. 2a - b$; donc $4aa - 2ab = bb$; & ajoutant de part & d'autre

* L. 3. n. 84. † L. 4. n. 58. ‡ L. 3. n. 45. ‡ L. 3. n. 53.

tre $+ 2ab$, on aura $4aa = 2ab + bb$*. Ajoutant encore de part & d'autre aa, il vient $5aa = aa + 2ab + bb$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

69 *Si une ligne droite est coupée en moyenne & extrême raison, le quarré fait de la plus petite avec la moitié de la plus grande, est quintuple du quarré de la moitié de la plus grande partie.* Eucl. XIII. Prop. 3.

Soit *AB* une ligne coupée en moyenne & extrême raison au point *C*. *fig. précéd.* Soit $AC = 2m$, & $CB = n$. Donc $AB = 2m + n$. Il faut démontrer que le quarré fait de la moitié de *AC* la plus grande partie, avec *BC* la plus petite, c'est-à-dire, fait de $m + n$, qui est $mm + 2mn + nn$, est quintuple de celui de la moitié de *AC*, c'est-à-dire, de m, lequel est mm. Selon la supposition $\div 2m + n . 2m . n$: donc $2mn + nn = 4mm$ †; ajoutant mm de part & d'autre, on aura $mm + 2mn + nn = 5mm$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XIV.

70 *Si une ligne droite est coupée en moyenne & extrême raison, le quarré de la toute & celui de la plus petite partie joints ensemble, sont triples du quarré de la plus grande partie.* Eucl. XIII. Prop. 4.

Soit *AB* coupée en moyenne & extrême raison au point *C*. *fig. précéd.* Soit $AB = Z$, & $AC = a$, & $BC = e$. Donc $\div Z . a . e$. Il faut démontrer que $ZZ + ee = 3aa$.

1°. $ZZ = aa + 2ae + ee$ ‡. Ainsi il faut démontrer que $aa + 2ae + 2ee = 3aa$.

2°.

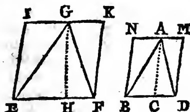
* *L. 3. n. 55.* † *L. 3. n. 57.* ‡ *L. 3. n. 20.*

2°. $ae + ee = Ze$[a], & $Ze = aa$[b] par la suppoſition. Ainſi $ae + ee = aa$. On peut donc dans l'Equation à prouver, ſubſtituer, au lieu de $2ae + 2ee$, leur valeur égale $2aa$, & viendra $aa + 2aa = 3aa$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XV.

Les triangles & parallelogrammes ſemblables, ſont entre eux en raiſon doublée de leurs côtez de même raiſon. Eucl. VI. Prop. 19. 71

Soient *ABD* & *EFG* deux triangles ſemblables. Soient abaiſſées les perpendiculaires *AC* & *GH*; les triangles *EGH* & *BAC* ſont ſemblables étant rectangles, & l'angle *B* étant égal à l'angle *E*; donc *BC*. *AC* : : *EH*. *GH* [c].



Les deux triangles *DAC* & *FGH* étant auſſi ſemblables : donc pareillement *CD*. *AC* : : *FH*. *GH*; ainſi $BC + CD$. *AC* : : $EH + HF$. *GH* [d]. Soit $AC = b$ & $BD = d$, $GH = m$ & $EF = n$; ainſi *b*. *d* : : *m*. *n* : & *alternando*, *b*. *m* : : *d*. *n* [e]. La ſurface de *ABD* eſt la moitié de *bd* [f], & celle de *GEF* eſt la moitié de *mn*; mais la raiſon de *bd* à *mn* eſt compoſée des deux raiſons de *b* à *m*, & de *d* à *n* [g]. Or ces deux raiſons ſont les mêmes: donc, ſelon la Défini-

 tion

a L. 3. n. 19. b L. 3. n. 57. c *ſup.* n. 10. d L. 3. n. 63. e L. 3. n. 46. f L. 2. n. 135. g L. 3. n. 77.

tion de la raison doublée*, la raison de *b d* à *m n* est doublée.

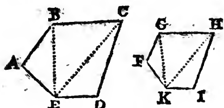
Soient deux parallelogrammes *B D M N* & *E E K I* semblables, par les mêmes raisonnemens on prouvera que *b. d* : : *m. n*, & *b. m* : : *d. n*; *b d* est la surface de *B D M N*, & *m n* celle de *EF KI*. La raison de *b d* à *m n* est composée des deux raisons de *b* à *m* & de *d* à *n*. Ces deux raisons sont égales; cette raison composée est donc doublée.

LEMME.

72 *Les figures polygones semblables peuvent chacune être divisées en égale quantité de triangles semblables, chacun au sien.*

Soient deux figures semblables *A B C D E*, *FG H I K*; je dis qu'elles peuvent être divisées en une égale quantité de triangles chacun semblable à celui qui lui répond. Car 1°. puisque les figures sont semblables, elles auront un égal nombre de côtez, & les angles qu'ils comprendront seront égaux par la Définition †; ainsi d'un des angles égaux, comme de *E* & *K*, on peut mener des lignes aux autres angles qui divisent ces figures dans une égale quantité de triangles ⊥. 2°. Tous les triangles d'une figure seront semblables à ceux de l'autre, chacun à celui qui lui répond; ainsi le triangle *ABE* sera semblable au triangle *FGK*, qui lui répond: car par la supposition l'angle $EAB = KFG$: & les côtez qui les comprennent sont proportionnels, c'est-à-dire, que *EA. AB* : : *KF. FG*; & partant ces deux triangles sont semblables ‡. Il en sera de même des autres triangles, dont les angles compris

*L. 3. n. 72. † *sup. n. 58.* ⊥ *L. 2. n. 122.* ‡ *sup. n. 13.*



pris par les côtez homologues sont égaux, soit qu'ils soient formez par les côtez des figures, ou qu'ils soient leurs résidus en ayant ôté les égaux qui les touchent aux points *E* & *K*, tels que *BEC* & *GKH*. Donc, &c. ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVI.

Toutes les figures rectilignes semblables, sont entre elles comme les quarrez de leurs côtez homologues. 73

Supposant les mêmes choses & la même figure du Lemme précédent. 1°. chacune de ces figures se peut diviser en un égal nombre de triangles semblables entre eux, chacun au sien, par le précédent Lemme. 2°. Chacun des triangles d'une figure sera à chacun autre de l'autre figure qui lui répond, en raison doublée de chaques côtez homologues, par le Théorême précédent *, c'est-à-dire, en raison doublée de *AE* à *FK*, ou *AB* à *FG*; mais le quarré de *AE* est à celui de *FK*, en raison doublée de *AE* à *FK* †: & il en est de même de tous les autres triangles qui composent ces deux figures, dont à cause de leur similitude tous les côtez gardent la même proportion. Partant comme chaque triangle de l'une est à son

* *Sup. n.* 71. † *El.* 3. *n.* 10.

son semblable dans l'autre, ainsi tous les triangles de l'une à tous les triangles de l'autre *, c'est-à-dire, la premiere figure à la deuxieme, comme le quarré du côté *AE* à celui de *FK*: Et il en est de même de tout autre qu'on voudra choisir. Donc, &c. ce qu'il falloit conclure.

COROLLAIRE.

74 *Si quatre lignes sont proportionnelles, les figures semblables décrites sur ces lignes sont proportionnelles: & si ces figures semblables sont proportionnelles, ces quatre lignes sont proportionnelles.* Eucl. VI. Prop. 22.

Soient quatre lignes proportionnelles *a. b* : : *c. d*, sur lesquelles soient décrites quatre figures semblables *V*, *X*, *Y*, *Z* par le Théorême précédent *V. X* :.: *aa. bb*, & *Y. Z* : : *cc. dd*. Mais *aa. bb* : : *cc. dd* †. Donc *V. X* : : *Y. Z*

Et si cela est, *a. b* : : *c. d*. Car les raisons doublées égales sont composées de raisons égales; ainsi si *aa. bb* : : *cc. dd*, il faut que *a. b* : : *c. d*.

THEOREME XVII.

75 *Les triangles & les parallelogrammes de même hauteur, sont entre eux en même raison que leurs bases.*

Soient *Z* & *X*, ou deux triangles ou deux parallelogrammes, ayant la même hauteur que je nomme *a*; la base de *Z* est *b*, & celle de *X* est *d*. La surface de *Z* est *ab*, si c'est un parallelogramme; mais seulement la moitié, si c'est un triangle ‡: *ad* est aussi la surface de *X*; ou si c'est un triangle, seulement la moitié. Or *ab*. *ad*

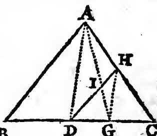
* *L*. 3. *n*. 50. † *L*. 3. *n*. 84. ‡ *L*. 2. *n*. 133.

ad : : *b. d**. Donc *Z* & *X* font entre eux, comme leurs bases.

PROBLEME I.

Un point étant donné dans un des côtez d'un triangle, mener une ligne par ce point qui le divise, selon une raison donnée. 76

Soit *ABC* un triangle qu'il faut partager, en menant une ligne droite par le point *D*, selon une raison donnée. Soit cette raison celle de *BG* à *GC*. Si le point *D* & *G* étoient un même point, il faudroit mener de *D* à *A* une ligne : car *BAD* & *DAC* font entre eux comme *BD* & *DC* †. Ainsi ce qu'on propose feroit fait. Si *G* & *D* font deux differens points, je mene *GH* parallelement à *AD* .& de *D* à *H*, où cette parallele coupe *AC*, une autre ligne, savoir *DH*; il faut prouver qu'elle partage le triangle *ABC*, selon la raison de *BG* à *GC*.



Les deux triangles *BAG* & *GAC* font entre eux comme *BG* à *GC* ‡. Il n'est donc question que de prouver, que *DHC* = *AGC*, & *DBAH* = *BAG*; ainsi que *DHC*. *AGC* : : *DBAH*. *BAG*. Les deux triangles *GAH* & *GHD* entre mêmes paralleles sur la même base *GH* font égaux ‡. Donc *GHC* + *CDH*, ou *DHC* = *GHC* + *GAH*, ou *GAC*. Reste à prouver que *ABDH* = *ABG*; ce qui est facile : car par la même raison qui vient d'être dite, le triangle *ADG* est égal à celui de *AHD*;

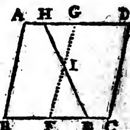
* *L.* 3. *n.* 54. † *sup. n.* 75. ‡ *sup. n.* 75. ‡ *L.* 2. *n.* 134.

AHD; ainsi les ajoutant chacun au triangle *ABD*, on aura $ABDH = ABG$: & partant $ABDH. DHC :: ABG. ABC$. On a donc fait ce qu'il falloit faire.

PROBLEME II.

77 *Partager un Parallelogramme selon une raison donnée, en menant une ligne par un point donné.*

Soit *ABCD* un parallelogramme. Il le faut couper selon la raison de *BF* à *FC*, menant une ligne par *E* un point donné.



1°. Je mene *FG* parallele à *AB*, ou à *CD*. Ces deux portions *ABFG* & *CDGF* sont entre elles, comme *BF* est à *FC*, selon le dernier Théorême [a].

2°. Je prens *CH* égal à *FE*, & ayant mené de *E* à *H* une ligne droite, je dis que *ABEH* & *ECDH* sont les portions que l'on cherche: car *HGI* & *EFI* sont deux triangles semblables; puisqu'ils sont équiangles: car les angles au point *I* sont égaux [b], & les autres angles sont pareillement égaux, étant alternes entre les paralleles [c]; ainsi ces triangles ayant les côtez *EF* & *GH* égaux, sont entierement égaux [d]. Partant $ABFIH + ABFG - HGI$; & ajoutant de part & d'autre la valeur de *HGI* égal *FIE*, on aura $ABFIH + FEI = ABFG$: ce qu'il falloit démontrer. On prouvera de la même maniere $CDHE = CDGF$.

THEO-

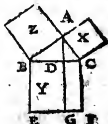
a *Sup. n.* 75. b *L.* 2. *n.* 21. c *L.* 2. *n.* 25. d *L.* 2. *n.* 96.

THEOREME XVIII.

Dans un triangle rectangle le quarré de l'hypothénuse est égal aux quarrez des deux autres côtez. Eucl. I. Prop. 47. 78

Autre Démonstration que celle qu'on a donnée au Livre II. n. 142.

ABC est un triangle rectangle. L'angle droit est A, & BC l'hypothénuse.



Il faut prouver que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; & d'une autre maniere que nous n'avons fait [a].

J'abaisse de l'angle droit A, la perpendiculaire AD; que je prolonge. Selon ce qui a été prouvé [b], $\div BC. BA. BD$: donc [c] $\overline{AB}^2 = BC \times BD$, ou $BE \times BD$ puisque $BC = BE$, à cause du quarré.

De même $\div BC. AC. CD$; donc $\overline{AC}^2 = BC \times CD$, ou $CF \times CD$ puisque $CF = CB$.

Or $\overline{BC}^2 = BE \times BD + CF \times CD$ [d]: donc $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

Dans les triangles rectangles, quelque figure que ce soit, faite sur l'hypothenuse, est égale aux figures semblables & posées de la même maniere sur les deux autres côtez. Eucl. VI. Prop. 31. 79

Soient sur les côtez BD. DA. AB trois figures X. T. Z semblables, X soit sur l'hypothé-

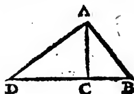
a *L. 2. n. 142.* b *sup. n. 23.* c *L. 3. n. 57.* d *L. 3. n. 18.*

thénuse. Ces figures sont entre elles comme $\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{AB}^2$ [a]. Or $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$ par ce Theorême: donc $X = Y + Z$.

COROLLAIRE II.

80 *Dans un triangle rectangle ayant mené de l'angle droit une perpendiculaire sur l'hypothénuse, les quarrez faits sur les deux autres côtez sont entre eux comme les parties de l'hypothénuse.*

Soit ABD un triangle rectangle, dont DB est l'hypothénuse, sur laquelle de l'angle droit A tombe la perpendiculaire AC. Il faut prouver que $\overline{AD}^2 . \overline{AB}^2 :: DC . CB$, puisque $\div DB . DA . DC$ [b]; Donc $DB \times DC = \overline{DA}^2$ [c]. Par la même raison $\div DB . BA . BC$; donc aussi $DB \times CB = \overline{BA}^2$. Partant $DB \times DC . DB \times BC :: \overline{AD}^2 . \overline{AB}^2$: mais $DB \times DC . DB \times BC :: DC . CB$ [d]: ainsi, $\overline{AD}^2 . \overline{AB}^2 :: DC . CB$; ce qu'il falloit démontrer.

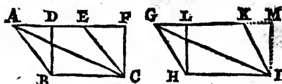


THEOREME XIX.

81 *Les parallelogrammes qui ont un angle commun ou égal, sont en raison composée des côtez qui le comprennent.* Eucl. VI. Prop. 23.

L'angle ABC est égal à l'angle GHI. Je dis que ces deux parallelogrammes sont en raison composée de AB à GH, & de BC à HI. Ces parallelogrammes $ABCE$ & $GHIK$ sont égaux aux

a *sup. n.* 73. b *sup. n.* 28. c *L.* 3. *n.* 57. d *L.* 3. *n.* 54.



aux rectangles *BDFC* & *HLMI* chacun au sien [a], lesquels sont en raison composée de *BD* à *HL* & de celle de *BC* à *HI* [b]. Or la raison de *DB* à *HL* est la même que celle de *AB* à *GH*, les deux triangles *ABD* & *GHL* étant semblables. Car, 1°. ils sont rectangles. 2°. Les angles *ABC* & *GHI* étant égaux, si on ôte les angles droits *DBC* & *LHI*, les restes *ABD* & *GHL* sont égaux; ainsi ils sont équiangles [c]. Et partant ils ont les côtez proportionnels [d].

COROLLAIRE I.

Lorsque deux parallelogrammes égaux ont un angle commun ou égal, les côtez qui le comprennent, sont en raison réciproque. Eucl. VI. Prop. 14. 82

Si les parallelogrammes *ABCE* & *GHIK* sont égaux entre eux, *fig. ci-dessus:* je dis que *AB. BC. GH. HI* sont en raison réciproque; c'est-à-dire, que *AB. GH* :: *HI. BC.*

Puisque $BD \times BC = HL \times HI$. Donc [e] *BD. HL* :: *HI. BC*. Or puisque par la supposition les angles *ABC* & *GHI* sont égaux; on conclura [f] que *AB. GH* :: *BD, HL* :: *HI. BC*; & partant *AB. GH* :: *HI, BC* [g]; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

Si deux triangles ont une surface égale, & un angle commun ou égal, les côtez qui comprennent 83 *cet*

a *L.* 2. *n.* 129. b *L.* 3. *n.* 77. c *L.* 2. *n.* 80. d *sup. n.* 10. e *L.* 3. *n.* 58. f *sup. n.* 7. g *L.* 3. *n.* 53.

cet angle sont en raison réciproque. Eucl. VI. Prop. 15. (*même fig.*)

Soient deux triangles *ABC* & *GHI* dont les surfaces sont égales, & les angles *ABC* & *GAI* égaux. Il faut démontrer que *AB*. *GH* : : *HI*. *BC*. Ces triangles sont moitiez des parallelogrammes *ABCD* & *GHIK*, dont on vient de prouver que *AB*. *GH* : : *HI*. *BC*; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME III.

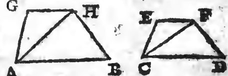
84 *Trouver un quarré égal à un rectangle donné.*

Soit *bd* le rectangle donné. Il faut chercher une moyenne proportionnelle entre *b* & *d*[a]. Si c'est *x*, donc ÷ *b*. *x*. *d*. & $bd = xx$[b]. Ainsi on a trouvé un quarré égal à un rectangle donné.

PROBLEME IV.

85 *Sur une ligne droite donnée décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée.* Eucl. VI. Prop. 28.

Soit *AB* une ligne droite, sur laquelle il faut faire une figure semblable au rectiligne *CDFE*, & semblablement posée.



Je résous *CDEF* en deux triangles, suivant que le nombre de ses côtez l'exige[c] sur *AB*; je fais *ABH*, triangle semblable au triangle *CDF*[d], & sur *AH* le triangle *AGH* semblable à *CEF*, & ainsi de suite, s'il y a plus de triangles. Ces triangles semblables ont leurs côtez proportion-

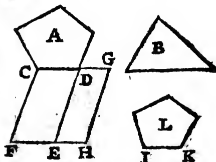
a. *sup.* n. 89. b *L.* 3. n. 37. c *L.* 2. n. 382. d *L.* 2. n. 97.

tionnels [a]; mais comme ils forment ou composent ces deux figures, elles auront donc aussi leurs angles égaux, & leurs côtez homologues proportionnels. Ainsi AB AG :: DC. CE, & conséquemment ces figures seront semblables [b]; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME V.

Deux figures rectilignes étant données, en décrire une troisieme semblable à l'une & égale à l'autre. Eucl. VI. Prop. 25. 86

La Rectiligne donnée est A; il en faut faire une qui lui soit semblable & égale à B, autre Rectiligne donnée.



Sur CD je fais le Parallelogramme CE égal à A [c], & de la même maniere sur D le Parallelogramme DH égal à B ayant l'angle donné D, ensuite je trouve IK moyenne proportionnelle entre CD & DG [d] sur IK, je fais L semblable à A [e]; je dis que L est la figure demandée. Il faut prouver que L est égal à B.

A & L étant semblables par la construction, elles sont l'une à l'autre comme $\overline{CD}^2$ à $\overline{IK}^2$ [f], c'est-à-dire, en raison doublée de CD à IK [g]; mais par l'hypothese $\div CD. IK. DG$: ainsi CD est à DG aussi en raison doublée de CD

à

a *sup. n.* 10. b *sup. n.* 38. c *L.* 2. *n.* 139. & 140. d *sup. n.* 29. e *sup. n.* 85. f *sup. n.* 73. g *L.* 3. *n.* 80.

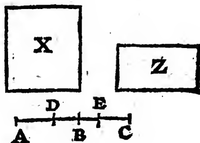
à IK *, & par conséquent $CD. DG :: A : L$; mais aussi $CD. DG :: CE. DH$ †. Et par la construction $CE = A$ & $DH = B$: donc $CD. DG :: \left\{ \begin{matrix} A. B. \\ A. L. \end{matrix} \right.$ Partant $B = L$ ‡; ce qu'il falloit démontrer.

Remarquez que cette construction se feroit plus facilement, si au-lieu du Parallelogramme CE *indifferent, on avoit fait un Rectangle.*

THEOREME XX.

87 *Un quarré de même circuit qu'un parallelogramme rectangle, est plus grand que ce parallelogramme de la valeur du quarré de la moitié de la difference, qui est entre les côtez de ce parallelogramme.*

X est un quarré, & Z un parallelogramme de même circuit. AC est la somme des deux côtez, tant de X que de Z. La moitié de AC, qui est AB, est le côté du quarré X. AE est le grand côté de Z, & EC le petit. Soit AB ou $BC = b$, & $BE = a$ & qu'on prenne $BD = a$: donc



AE le grand côté de Z sera $b + a$, & le moindre EC ou AD sera $b - a$; leur difference sera donc $2a$, le quarré X sera donc égal à bb, & le rectangle Z égal au produit de $b + a \times b - a$, c'est-à-dire, à $bb - ab + ab - aa$ où $bb - aa$; par conséquent la difference de X & de Z est

aa,

* L. 3. n. 72. † sup. n. 75. ‡ L. 3. n. 52.

aa, quarré de la moitié de la difference des côtez; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XXI.

De deux Polygones réguliers de même circuit, celui qui a plus de côtez a une plus grande surface. 88

Un polygone est égal à un triangle, qui a pour base son circuit, & pour hauteur son apothême [a]. Soient donc deux polygones de même circuit; je nomme x la moitié de leur circuit, l'apothême de celui qui a plus de côtez soit b, celui de l'autre soit d; voila donc [b] leur surface $x\,b$, & $x\,d$. Or $x\,b.\ x\,d :: b.\ d$ [c], & $b > d$ [d]: donc $x\,b$ sera plus grand que $x\,d$.

COROLLAIRE.

De toutes les figures isoperimetres, c'est-à-dire, de même circuit, le cercle est la plus capable. 89

Car, 1°. un quarré est plus grand qu'un parallelogramme de même circuit [e]. Le quarré est un polygone, & par conséquent le cercle, consideré comme un polygone d'un nombre infini de côtez, a un plus grand apothême que lui, ainsi une plus grande surface. Il en est de même des autres polygones.

THEOREME XXII.

Les Polygones réguliers & semblables, sont en raison doublée de celles de leurs côtez. Eucl. VI. Prop. 20. 90

Soient X & Z deux polygones semblables; ils sont égaux à deux triangles semblables [f]: & si a est la moitié du circuit de, X & b son apothême, & c la moitié du circuit de, Z & d son

a *L.* 2. *n.* 145. b *L.* 2. *n.* 135. c *L.* 3. *n.* 54. d *Sup. n.* 48. e *Sup. n.* 87. f *L.* 2. *n.* 145.

son apothême, $ab = X$ & $cd = Z$. Or ab est à cd en raison doublée de celle de a à c, ou de celle de b à d *, puisqu'elle est égale par l'hypothese, ces figures étant semblables.

COROLLAIRE.

91 *Donc la surface d'un cercle est à celle d'un autre cercle en raison doublée de son circuit, ou de son diametre.*

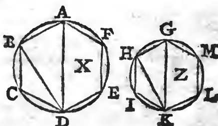
Car ce sont deux polygones semblables d'un nombre infini de côtez.

THEOREME XXIII.

92 *Les Polygones réguliers & semblables, sont entre eux comme les quarrez des diametres des cercles où ils sont inscrits.* Eucl. XII. Prop. 1.

Soient deux polygones X & Z inscrits dans deux cercles, il faut démontrer qu'ils sont entre eux comme les quarrez de leurs diametres AD, & GK.

Puisque X & Z sont polygones semblables, ils seront l'un à l'autre en raison doublée du côté AB



au côté GH, par le Theorême précédent; mais à cause de cette similitude, les triangles ABD, GHK sont aussi semblables: car tous leurs angles sont égaux étant, appuyez sur semblables circonferences †. Donc les côtez homologues seront proportionnels ‡, & partant $AB. GH :: AD. GK$; ainsi la raison doublée

* *Sup. n. 71.* † *L. 2. n. 39.* ‡ *Sup. n. 10.*

blée de *AB* à *GH* sera la même que la doublée de *AD* à *GK*. Donc le Polygone *X* sera au Polygone *Z* en raison doublée du diametre *AD* à *GK*, c'est-à-dire, comme le quarré *AD* au quarré de *GK**; ce qu'il falloit démontrer.

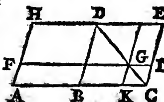
COROLLAIRE.

Donc puisque les Cercles peuvent être pris pour des Polygones, leurs surfaces sont entre elles comme les quarrez de leurs diametres. Eucl. XII. Prop. 2. 93

THEOREME XXIV.

AB=BC; *le Parallelogramme* ABDH *sera plus grand que le Rectangle* AFGK, *& que quelque autre dont le point* G *sera dans la diagonale* DC. Eucl. VI. Prop. 27. 94

$BG=GE$ †: donc $BG+GC=GE+GC$, c'est-à-dire, que $BI=KE$. Or $BF=BI$, puisque $AB=BC$. Donc $BF+BG$, ou $AG=BG+KE$. Or $BG+KE$ est plus petit que BE, ou AD son égal. Donc AG est plus petit que AD.



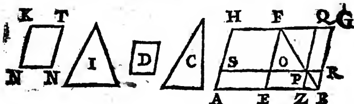
PROBLEME VI.

Appliquer à AB, *ligne donnée, un Parallelogramme égal à* C, *défaillant d'un Parallelogramme semblable à* D. 95

C *ne doit pas être plus grand qu'un Parallelogramme fait semblable à* D, *& appliqué à la moitié de* AB, *c'est-à-dire, plus grand que* AF *ou* EG. Eucl. VI. Prop. 28.

Cou-

* *L.* 3. *n.* 10. † *L.* 2. *n.* 132.



Coupez AB également au point E, fur EB faites le parallelograme EG femblable à celui D [a], lequel fera plus grand que C fuivant la requifition; que cet excès foit de la figure I; foit fait le parallelogramme NT égal à I, & femblable à D ou EG par le Problême [b], foit menée la diagonale FB, & foit fait $FO = KN$ & $FQ = KT$; par O & Q foient menées les paralleles SR & QZ: le parallelogramme AP eft ce qu'on cherche.

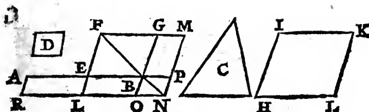
Car ces parallelogrammes D, EG, OQ, NT, ZR font femblables entre eux, & $EG = NT + C = OQ + C$; par conféquent C eft égal au gnomon $OPQ = AO + PG = AO + EP = AP$; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME VII.

96 *A* AB *une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à* C, *qui excede d'un parallelogramme femblable à* D. Eucl. VI. Prop. 29.

Soit coupée également AB en E; fur EB foit fait EG femblable à D [c]; enfuite au moyen des Problêmes [d] foit trouvé HK égal à $EG + C$ & femblable à D ou à EG. Je prolonge FE & FG, de forte que $FL = IH$ & $FM = IK$. Je mene par L & M les paralleles RN, MN

a *fup. n.* 85. b *fup. n.* 86. c *fup. n.* 85.
d *L.* 2. *n.* 139. & *fup. n.* 86.



MN & AR; je prolonge AB & GB; je mene le diametre FBN, & AN est le parallelogramme qu'on cherche.

Car ces quatre parallelogrammes D. HK, LM. EG sont semblables par la construction; donc OP est semblable à LM, ou à D *.

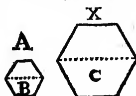
De même $LM = HK$, par la construction; ainsi $LM = HK = EG + C$: donc $LM = EG + C$: donc $LM - EG = C$. Or $LM - EG$ est égal à $BM + LB + BN$, ou égal à $BL + AL + BN$; car $AE = EB$ par l'hypothese: donc $C = BL + AL + BN$ ou $C = AN$; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME VIII.

A une figure rectiligne donnée, en trouver une autre semblable en raison donnée. 97

Soit A une figure donnée. On demande la figure X, à laquelle la surface de A ait une raison donnée, comme par exemple de 5 à 1.

Ces figures, supposées semblables, doivent être entre elles comme les quarrez de leurs côtez homologues †, c'est-à-dire, en raison doublée desdits côtez ‡, ou même



L

* *sup. n. 51.* † *sup. n. 73.* ‡ *L. 3. n. 10.*

me de quelque autre ligne, corde, ou diametre homologue qui en joint les angles comme *B* & *C*. Il faut donc pour cela, entre le diametre *B* & une autre ligne *D*, à laquelle il soit comme 5 à 1, trouver une moyenne proportionnelle *C* [a]; de sorte que ∺ *B C. D*, & sur cette ligne *C* décrire la figure *X* semblable à *A* [b], ces deux figures *A* & *X* sont entre elles comme les quarrez de *B* & *C* [c], ou en raison doublée de *B* à *C*, c'est-à-dire, comme *B* à *D*, ou 5 à 1 : ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE I.

98 *Donc il est facile de trouver une figure semblable à une donnée, & moindre qu'une autre d'une certaine figure donnée.*

Car il n'y a qu'à la ligne *B*, côté de la figure donnée, en prendre une autre *D* qui lui soit dans la proportion requise, & entre elles trouver, suivant ce qui a été enseigné [d], la moyenne proportionnelle *C*, & sur icelle comme côté décrire une figure semblable à la donnée [e], laquelle sera la cherchée, suivant ce Problême.

COROLLAIRE II.

99 *Il est également facile de trouver une figure semblable à une donnée, & plus grande qu'une autre d'une certaine figure donnée.*

C'est une semblable construction que la précédente.

SEC-

a *sup. n.* 29. b *sup. n.* 95. c *sup. n.* 71.
d *sup. n.* 29. e *sup. n.* 8.

SECTION V.

De la Commenſurabilité ou Incommenſurabilité des Lignes & des Surfaces.

LEs grandeurs ſont dites Commenſurables, lorſqu'elles peuvent être meſurées par une troiſieme, qui eſt ainſi leur commune meſure. 100

La commune meſure d'une toiſe & d'un pié, c'eſt le pouce, qui ſe trouve exactement douze fois dans un pié, & ſoixante-douze fois dans une toiſe.

DEFINITION II.

Les grandeurs Incommenſurables, ſont celles 101 *qui ne peuvent être meſurées par aucune commune meſure.*

Une hauteur de ſept piés ne peut être meſurée exactement par une toiſe; mais elle le peut être par une meſure plus petite, comme par un pié & par un pouce. Ainſi deux grandeurs ne ſont incommenſurables que lorſqu'on ne peut trouver de meſure, pour petite qu'elle ſoit, qui les puiſſe meſurer préciſément.

COROLLAIRE.

Donc deux grandeurs qui ont un rapport infi- 102 *ni, ſont incommenſurables entre elles.*

Car ſi elles étoient commenſurables, leur commune meſure détermineroit leur rapport. Celui du point à la ligne eſt infini; car on ne peut point déterminer en quelque ligne que ce ſoit, combien il y a de points, puiſqu'on la

peut diviser à l'infini. De même entre une ligne & une surface le rapport est infini ; car dans une surface on y concevra tant de lignes qu'on voudra, comme dans un solide des surfaces.

DEFINITION III.

103 *L'on appelle Rationnelle, une grandeur connue & déterminée, par rapport à une autre dont la valeur se peut exprimer par nombre.*

Grandeur Rationnelle est celle à laquelle on rapporte toutes les autres, & sur laquelle on raisonne ; ainsi on la suppose connue.

DEFINITION IV.

104 *Deux grandeurs qui ne sont pas commensurables en elles-mêmes, le sont en puissance, si leurs quarrez ou leurs cubes sont commensurables.*

Si b & c sont incommensurables, mais que leurs quarrez soient commensurables, que par exemple bb soit à cc comme 3 à 5, alors b & c incommensurables en eux-mêmes, sont commensurables en seconde puissance. Si x & z n'étoient pas commensurables ni leurs quarrez xx & zz, mais que leurs cubes xxx & zzz ou x^3, z^3 le fussent: par exemple, que x^3 fût à z^3 comme 10 à 13, alors x & z incommensurables en eux-mêmes & en seconde puissance, seroient commensurables en troisieme puissance.

DEFINITION V.

105 *Nombre quarré, c'est le produit d'un nombre multiplié par lui-même.*

Ainsi 9 est un nombre quarré, parce que c'est le produit de 3 multiplié par 3, qui en est la racine.

DE-

DEFINITION VI.

Nombre cube, c'est le produit d'un nombre quarré multiplié par la racine de ce quarré, c'est-à-dire, par le nombre qui l'a produit. 106

Ainsi 8 est un nombre cube fait de 4 nombre quarré multiplié par 2 racine de ce quarré, c'est-à-dire, de 2, qui multiplié par lui-même, a fait ce quarré 4.

DEFINITION VII.

Nombre non quarré, c'est celui dont la racine quarrée ne se peut exprimer par aucun nombre. 107

DEFINITION VIII.

Nombre non cube, c'est celui dont la racine cube ne se peut exprimer par aucun nombre. 108

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 sont des nombres qui n'ont point de racine quarrée qui se puisse exprimer par des nombres; car on ne peut point trouver aucun nombre, qui multiplié par lui-même, fasse ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 10, &c. Ces nombres, à la reserve de 8, ne sont point aussi des nombres cubes, car il n'y a aucun nombre, qui multiplié cubiquement, les puisse produire.

DEFINITION IX.

Nombres exposans d'une raison, sont les plus petits nombres qui l'expriment. 109

Ainsi si x est à z comme 6 à 12, les exposans de la raison de x à z seront 1 & 2, qui sont les plus petits nombres qui puissent être entre eux, comme 6 & 12.

Lorsqu'on joint deux grandeurs qui ne sont pas commensurables, & à qui par conséquent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on est obli-

gé d'exprimer par deux noms differens, cela s'appelle un Binome. *Lorsque d'une grandeur on en retranche une autre qui lui est incommensurable, & qu'ainsi on ne les peut exprimer avec un seul signe, c'est bien un* Binome; *mais pour distinguer cela de ce qui se fait quand on joint deux grandeurs incommensurables, on l'appelle* Apotome, *ou Résidu, ou Grandeur diminuée. Je n'expliquerai point ici les termes, que j'ai déja expliqué dans les Elémens de Mathématiques.*

PROPOSITIONS EVIDENTES.

PROPOSITION I.

110 *Deux nombres sont toujours commensurables entre eux, car ils ont au moins l'unité pour leur commune mesure.*

Par exemple, dans ces deux nombres 77 & 81, comme dans tous les autres, l'unité s'y trouve précisément tant de fois, ainsi elle en est la mesure commune.

PROPOSITION II.

111 *Lorsque d'un nombre on en retranche un autre, le reste est un nombre.*

Car il reste une ou plusieurs unitez.

PROPOSITION III.

112 *Les lignes & les surfaces qui sont comme nombre à nombre, sont commensurables; & celles qui sont incommensurables ne sont pas comme nombre à nombre.*

C'est une suite des Définitions précédentes.

PROPOSITION IV.

113 *Deux grandeurs commensurables à une troisieme, sont commensurables entre elles.*

Car

Car si B & Z sont commensurables, on peut exprimer avec des nombres leur rapport. Si C & Z sont pareillement commensurables, on exprimera leur rapport avec des nombres; ainsi toutes ces trois grandeurs se marqueront avec des nombres : partant elles sont commensurables.

PROPOSITION V.

Une ligne, racine ou côté d'un quarré qui n'est pas un nombre quarré, n'est pas rationnelle. Elle le seroit, si son quarré étoit égal à un nombre quarré. 114

La racine d'un nombre qui n'est pas quarré ne se peut point exprimer par aucun nombre; ainsi toute ligne qui est égale à cette racine, ne se peut point marquer par aucun nombre.

PROPOSITION VI.

Si les quarrez de deux lignes ne sont pas entre eux comme deux nombres quarrez, ces deux lignes ne sont pas commensurables. 115

Ces lignes sont égales chacune à la racine d'un nombre qui n'est pas quatré, ainsi aucun nombre ne les peut exprimer; elles ne sont donc pas commensurables.

PROPOSITION VII.

Un quarré rationnel ne peut être égal à deux quarrez, dont l'un soit rationnel & l'autre ne le soit pas. 116

C'est ce qu'on a dit, Proposition seconde*: Qu'ôtant d'un nombre un autre nombre, le reste est un nombre. Ainsi si d'un quarré rationnel, c'est-à-dire, qui est un nombre, on ôte un quarré rationnel, c'est-à-dire, un nom-

 bre,

* *sup.* n. III.

bre, le reste doit être un quarré rationnel ou un nombre.

PROPOSITION VIII.

117 *Une ligne commensurable étant divisée en deux parties, si l'une est commensurable, l'autre le sera aussi.*

Car cette ligne s'exprimera par un nombre, dont ayant ôté une partie commensurable, c'est-à-dire, un nombre, le reste, selon la seconde Proposition, sera un nombre.

PROPOSITION IX.

118 *Si à une ligne commensurable on en ajoute une commensurable, le tout sera commensurable.*

Cela est évident, un nombre ajouté à un nombre fait un nombre.

PROPOSITION X.

119 *Si d'une ligne commensurable on retranche une incommensurable, le reste est incommensurable.*

Car si l'une étoit commensurable, l'autre le seroit aussi, selon la huitieme Proposition.

PROPOSITION XI.

120 *Quatre lignes étant en proportion, si la premiere est commensurable à la seconde, la troisieme le sera à la quatrieme. Si la premiere est incommensurable avec la seconde, la troisieme le sera à la quatrieme.*

Cela veut dire, que si la raison de la premiere à la seconde se peut exprimer par nombre; celle de la troisieme à la quatrieme, qui est la même, se peut aussi exprimer par nombre. Si la premiere raison ne se peut pas exprimer, il en est de même de la seconde raison.

PRO-

PROPOSITION XII.

Le quarré d'une ligne, qui est rationnelle, est un nombre quarré; son cube est aussi un nombre cube. 121

Cela est évident.

THEOREME I.

Si les raisons simples sont de nombre à nombre, les raisons doublées qui en sont composées auront pour exposans des nombres quarrez, & les raisons triplées auront des nombres cubes. 122

Soit cette raison simple de b à d: donc la raison de b^2 à d^2 est doublée. Or b & d se pouvant exprimer par nombres, leur quarrez le pourront. Ainsi b^2 & d^2 seront égaux à des nombres quarrez; ainsi b^2 & d^2, seront entre eux comme des nombres quarrez. Par les mêmes raisons, b^3 & d^3 seront entre eux comme des cubes.

THEOREME II.

Une raison simple est sourde, si la raison qui en est doublée ou triplée est sourde. 123

Car par le Théorême précédent, si cette raison n'étoit pas sourde, la raison doublée auroit pour exposant un nombre quarré, & la raison triplée un nombre cube.

THEOREME III.

Une raison simple n'est pas sourde, si les nombres exposans de sa raison doublée sont quarrez, & les exposans de sa raison triplée sont des cubes; & si cela n'est pas, elle est sourde. 124

Car les quarrez sont en raison doublée de leurs côtez ou racines, & les nombres cubes

 tri-

triplée de leur racine *; ainsi les racines des exposans d'une raison doublée ou triplée, seront les exposans de la raison simple; qui par conséquent ne sera pas sourde. Par la même raison si ces nombres ne sont pas quarrez ou cubes; comme leurs racines sont les exposans des raisons simples, ces raisons simples ne se pouvant exprimer par nombre, elles sont sourdes.

LEMME.

125 *Quatre lignes étant en proportion, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme le quarré du premier terme est au quarré du second terme.*

Soient $a. b :: c. d.$ Il faut prouver que $ac. bd :: aa. bb$; bc produit des moyens divisé par le premier terme est égal au quatrieme †; ainsi $\frac{bc}{a}$ se peut mettre pour d; partant $\frac{bbc}{a} = bd$. Ainsi il faut démontrer que $ac. \frac{bbc}{a} :: aa. bb$. Multipliez ac & $\frac{bbc}{a}$ par a, & vous aurez aac & bbc, & divisez ses produits par c, restera aa & bb. La même raison demeure toujours ‡: donc $ac. bd :: aa. bb$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

126 *Quatre lignes commensurables étant en proportion, le rectangle ou produit des antécédens, est à celui des conséquens, comme deux nombres quarrez.*

Soient ces quatre lignes commensurables & pro-

* L. 2. n. 73. & 75. † L. 3. n. 60. ‡ L. 3. n. 54. & 55.

proportionnelles $a. b :: c. d$; par le Lemme précédent $ac. bd :: aa. bb$. Or a & b sont supposez commensurables ; leurs quarrez sont donc un nombre quarré : donc ac & bd sont entre eux, comme deux nombres quarrez.

LEMME.

Six lignes étant proportionnelles, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme le cube du premier terme est au cube du second terme. 127

Soient $a. b :: c. d :: e. f$. Il faut prouver que $ace, bdf :: aaa. bbb$; $\frac{bc}{a} = d$, & $\frac{be}{a} = f$ *;

donc $bdf = \frac{b^3 ce}{aa}$. Or en multipliant ace & $\frac{b^3 ce}{aa}$ par aa, & divisant les produits de cette multiplication $a^3 ce$ & $b^3 ce$ par ce, après cela vient a^3, b^3, la même raison demeure toujours †; partant $ace. bdf :: a^3\ b^3$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME V.

Six lignes commensurables étant en proportion, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme deux nombres cubes. 128

Soient $a. b :: c. d :: e. f$; par le Lemme précédent, $ace. bdf :: a^3. b^3$. Or a & b étant commensurables, se pourront ainsi exprimer par nombres ‡, a^3 & b^3 sont deux nombres cubes ; par conséquent ace & bdf sont comme deux nombres cubes.

THEOREME VI.

Si trois lignes sont en proportion continue, & que 129

* *L. 3. n. 60.* † *L. 3. n. 54. & 55.* ‡ *sup. n. 103.*

que la premiere soit à la troisieme comme deux nombres quarrez, ces trois lignes seront commensurables.

Soit cette proportion continue ∺ *a. b. c.* Si la raison *a* à *c* est de nombre quarré; je dis que la raison de *a* à *b* sera une raison de nombre à nombre: car la raison de *a* à *c* est doublée de celle de *a* à *b*, ou comme le quarré de *a* au quarré de *b* *; & par conséquent par le Théorême troisieme †, cette raison doublée étant comme nombres quarrez, la raison simple dont elle est composée n'est pas sourde.

Corollaire.

130 *En ce cas le rectangle des extrêmes & ses côtez sont commensurables avec le quarré de la moyenne, & son côté.*

Car 1°. puisque par la supposition ∺ *a. b. c*, il s'ensuivra *ac* = *bb* ‡; & ainsi *ac* commensurable avec *bb*. 2°. Par le présent Théorême, les côtez *a*, *b*, *c* sont commensurables.

Theoreme VII.

131 *Si trois lignes sont en proportion, & que la premiere soit à la troisieme comme deux nombres, dont le produit n'est pas un nombre quarré* (ou qui ait pour exposans deux nombres qui ne sont pas quarrez) *la moyenne sera incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec la premiere & la troisieme.*

Soit ∺ *b. c. d*: la premiere *b* de ces trois lignes est à *d* la troisieme, comme ces nombres 2 & 9, dont le produit 18 n'est pas un nombre quarré. Je dis que la seconde ligne *c* sera incommensurable en elle-même, & commensurable en

* *L. 3. n. 86.* † *sup. n. 124.* ‡ *L. 3. n. 57.*

en puissance avec la premiere & la troisieme. Son quarré *cc* est égal à *bd*, ou à 18 [a]. Or 18 n'étant pas un nombre quarré, sa racine *c* ne se peut point exprimer par nombre, ainsi *c* est incommensurable en elle-même avec *b* & *d*; mais sa puissance *cc*, qui vaut 18, l'est avec *b* & avec *d*, c'est-à-dire, avec 2 & avec 9, puisque sa raison s'exprime par des nombres.

THEOREME VIII.

Si de trois lignes en proportion continue, la premiere n'est pas à la troisieme comme nombre à nombre, la moyenne est incommensurable avec elles, tant en elle-même qu'en puissance. 132

Soit cette proportion ∺ *b. c. d*, dont la premiere *b* n'est pas à *d* comme nombre à nombre; je dis que *c* ni sa puissance *cc* ne sont pas commensurables avec *b* & *d*: car la raison de *b* à *d* est doublée de celle de *b* à *c*, & de *c* à *d* [b]. Cette raison doublée étant donc sourde, la raison simple de *b* à *c* ou de *c* à *d* est donc sourde par le Théorême second [c].

Le quarré de *b* est au quarré de *c* comme *b* est à *d* [d]. Donc puisque *b* n'est pas à *d* comme nombre à nombre, *bb* & *cc* ne sont pas comme nombre à nombre; ainsi ce sont des incommensurables [e].

THEOREME IX.

Si de quatre lignes en proportion continue, la raison de la premiere à la quatrieme est une raison de nombre à nombre, qui ait pour exposans des nombres cubes; ces quatre grandeurs seront commensurables. 133

Soit ∺ *b. c. d. f.* Si *b. f* :: 1. 8, ces quatre li-

a *L.* 3. *n* 57. b *L.* 3. *n.* 83. c *sup. n.* 123.
d *L.* 3. *n.* 84. e *sup. n.* 112.

lignes *b*, *c*, *d*. *f* sont commensurables: car la raison de *b* à *f* est triplée [a]. Ces deux nombres 1 & 8 sont cubes; cette raison les ayant donc pour exposans, la raison simple comme celle de cette progression qui est entre chaque terme, ne peut être sourde [b], selon le Theorême troisieme.

THEOREME X.

134 *Si de quatre lignes en proportion continue, la raison de la premiere à la quatrieme a pour exposans des nombres qui ne sont pas cubes,* la premiere & la seconde *seront seulement commensurables en puissances; ainsi de même de la seconde & de la troisieme.*

Soit ∺ *b*. *c*. *d*. *f*, & que *b*. *f* : : 1. 5. La raison de *b* à *f* est triplée de celle de *b* à *c* [c]. Or 1 & 5, les exposans de la raison de *b* à *f*, ne sont pas cubes; la raison simple de *b* à *c* est donc une raison sourde [d]: ainsi de même de la raison de *c* à *d*, de celle de *d* à *f*. Mais puisque b^3. c^3 : : *b*. *f*; & par conséquent b^3. c^3 : : 1. 5 [e]: donc *b* & *c* sont commensurables en puissance.

THEOREME XI.

135 *Si de quatre lignes en proportion continue, la premiere n'est pas à la quatrieme comme nombre à nombre, la raison de la premiere à la seconde n'est pas de nombre à nombre.*

∺ *b*. *c*. *d*. *f*; la raison de *b* à *f* est triplée; donc cette raison triplée étant sourde, par le Théorême second, la raison simple de *b* à *c* est sourde; & puisque b^3. c^3 : : *b*. *f*, cette raison de *b* à *f* étant sourde, celle de b^3 à c^3 est sourde.

a *L*. 3. *n*. 83. b *sup*. *n*. 124. c *L*. 3. *n*. 83.
d *sup*. *n*. 124. e *L*. 3. *n*. 87.

de. Ainsi c n'est pas commensurable en puissance avec b.

PROBLEME I.

Trouver une ligne qui soit incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec une ligne connue. 136

Soit b une ligne; on en cherche une qui lui soit incommensurable. La ligne b étant 2, je prends x une ligne égale à 3 ou à 5, ou à tout autre nombre qui ne soit pas quarré. Entre ces deux lignes je cherche une ligne moyenne proportionnelle, que je nomme c: ainsi $\div\div b.\ c.\ x.$ Or par le Théorême septieme la ligne c sera incommensurable en elle-même avec ces deux premieres lignes, & commensurable en puissance *.

PROBLEME II.

Trouver une ligne qui soit incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec une ligne connue & donnée. 137

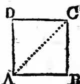
Soit la ligne donnée & connue B, je lui cherche par le Problême précédent la ligne D, qui lui soit incommensurable en elle-même. Après, entre B & D, ayant trouvé la ligne C moyenne proportionnelle; cette ligne par le Théorême huitiéme † sera incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance avec B; ce qu'il falloit faire.

THEOREME XII.

La diagonale d'un quarré est incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec chacun des côtez. 138

Soit le quarré $A B C D$. Il faut prouver que AC,

* *sup. n.* 134. † *sup. n.* 135.



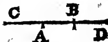
AC, sa diagonale, est en elle-même incommensurable avec AB; mais qu'elle l'est en puissance.

Soit $AB = a$; puisque $BC = AB$: donc $BC = a$: donc $aa + aa = \overline{AC}^2$: donc $aa. \overline{AC}^2 :: 1.2$; ainsi voilà la diagonale commensurable en puissance. Or 2 n'est pas un nombre quarré [b]: donc AC, racine de $\overline{AC}^2$ ne peut s'exprimer par nombre [c]; ainsi elle est incommensurable en elle-même [d]; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

139 *Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raison, ne sont pas rationnelles.* Eucl. XIII. Prop. 6.

Soit CB ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raison au point A; je dis que les parties AC & AB ne sont pas lignes rationnelles; ou, ce qui est la même chose, qu'elles ne peuvent être exprimées par des nombres.



J'ajoute à CB la ligne BD moitié de CB, le quarré de la médiane AB jointe avec BD, vaut cinq fois le quarré de BD [e]; ainsi ces deux quarrez sont comme 5 à 1. Or 5 n'est pas un nombre quarré: donc par le Theorême [f], la ligne $AB + BD$ n'est pas rationelle, mais BD moitié de AB ligne rationnelle, est rationnelle; il faut donc que ce soit la médiane AB qui ne soit pas rationnelle: & partant [g] la petite partie AC sera incommensurable; car si elle étoit commensurable, AB le seroit aussi [h].

Co-

a *sup. n.* 78. b *sup. n.* 106. c *sup. n.* 114. d *sup. n* 115.
e *sup. n.* 66. f *sup. n.* 114. g *sup. n.* 119. h *sup. n.* 117.

COROLLAIRE.

La médiane est incommensurable avec la toute, tant en elle-même qu'en puissance. 140

Soit b une ligne coupée en moyenne & extrême raison, x est la médiane, & $b-x$ la petite, $\div b.\ x.\ b-x$. Or puisque $b-x$ est une ligne non rationnelle par le Théorême présent, donc par le Théorême huitieme* x, moyenne entre b & $b-x$, est incommensurable avec b, tant en elle-même qu'en puissance.

SECTION VI.

Des Raisons des Cordes avec les rayons du Cercle.

AVERTISSEMENT.

Les Cordes d'un même Cercle ne sont pas entre elles comme les Arcs dont elles sont les Cordes: ces deux Arcs BED *& CFD étant égaux, l'Arc* BDC *est double de l'un & de l'autre. Si* BC, *corde de cet arc, étoit donc le double de la corde* BD *ou de la corde* DC, *comme l'arc* BDC *est le double de l'arc* BED; *alors* BC *seroit égal à* BD + CD; *ce qui ne peut être* †. *On ne peut donc pas supposer que les cordes d'un même cercle soient entre elles comme les arcs dont elles sont les cordes.* 141



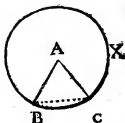
THEOREME I.

Le rayon du cercle est égal à la corde de soixante degrez. 142

L'an-

* *Sup. n. 132.* † *L. 1. n. 12.*

L'angle du centre d'un hexagone est de 60 degrez sixieme partie de 360 degrez, que valent les quatre angles droits qu'on peut concevoir autour du centre. Soit donc *BAC* un angle de 60 degrez; ainsi *BC* est le côté de l'hexagone qu'il faut prouver égal au rayon *AB* ou *AC*. Le triangle *BAC* est isoscele; ainsi les angles sur la base sont égaux; mais celui du sommet est de 60, ainsi tous deux ensemble valent 120, partant chacun 60. Ce triangle est donc équilateral: partant *BC* = *AB*, ou *BC* = *AC*; ce qu'il falloit prouver.



COROLLAIRE I.

143 *Un cercle étant donné faire un hexagone.* Eucl. IV. Prop. 15.

Le compas ouvert de la grandeur du rayon, je divise le cercle en six parties.

COROLLAIRE II.

144 *Il est facile de faire un triangle équilateral dans un cercle.*

Car deux parties des six de l'hexagone, sont la troisieme partie du cercle.

COROLLAIRE III.

145 *La raison de la circonference du cercle au rayon, est plus grande que 3 à 1.*

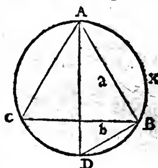
Chaque côté d'un hexagone étant égal au rayon, les six côtez seront égaux à trois fois le diametre; ainsi la circonference de ce polygone est au rayon du cercle où il est inscrit, com-

comme 3 à 1. Or la circonference de ce cercle eſt plus grande que celle de l'hexagone, chaque portion du cercle étant plus grande que le côté de l'hexagone qui lui ſert de corde.

THEOREME II.

Le quarré d'un des côtez du triangle équilateral inſcrit dans un cercle, eſt triple du quarré du demi-diametre ou du rayon de ce cercle. Eucl. XIII. Prop. 12. 146

Soit ABC un triangle équilateral inſcrit dans le cercle X; ſoit mené le diametre AD qui coupe la corde BC perpendiculairement en deux parties égales *. Il faut prouver que le quarré de AB eſt triple de celui du rayon; puiſque BC eſt la corde du tiers du cercle, BD ſera la corde de la ſixieme partie, & partant égale au rayon, dont le diametre AD eſt le double †. Ainſi ſi $BD = b$, il faut que $AD = 2b$, & $\overline{AD}^2 = 4bb$. Soit $AB = a$; puiſque ABD eſt rectangle: donc $aa + bb = \overline{AD}^2$ ‡. Ainſi $aa + bb = 4bb$. Otant bb de part & d'autre, reſtera $aa = 3bb$; ce qu'il falloit démontrer.



AVERTISSEMENT.

Je ne veux pas groſſir ces Elémens de pluſieurs Théorêmes ſemblables. Il eſt évident que la tangente d'un angle de quarante-cinq degrez eſt égale au 147

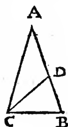
* *L.* I. *n.* 90. † *ſup. n.* 142. ‡ *ſup. n.* 78.

*ou rayon : car elle fait avec ce rayon un triangle rectangle dont la sécante est la base, sur laquelle les angles sont égaux, savoir, chacun de quarante-cinq degrez. Ainsi, 1°. il faut que cette tangente & le rayon soient égaux. 2°. Le quarré de la sécante * est égal au quarré du rayon & de la tangente, ou ce qui est la même chose, à deux fois le quarré du rayon. Or la corde de nonante est égale à la sécante de quarante-cinq degrez : par conséquent la corde de nonante est égale à deux fois le quarré du rayon, comme il est évident.*

LEMME PREMIER.

141 *Dans un triangle isoscele, si les angles de la base sont doubles de celui du sommet, je dis que la ligne qui coupe par la moitié un des angles de la base, coupe le côté opposé* AB *en moyenne & extrême raison.*

Soit BAC ce triangle isoscele, & que la ligne CD coupe par la moitié BCA un des angles de la base ; il faut prouver qu'elle coupe AB en moyenne & extrême raison au point D.



1°. Puisqu'on suppose que l'angle BCA est double de BAC ; donc la moitié DCA sera égale à l'angle CAD : partant le triangle ADC ayant sur sa base AC les angles égaux, il sera isoscele †, & aura ses côtez AD & DC égaux.

2°. L'angle BDC est égal aux deux opposez DAC & ACD ‡ ; par conséquent il est égal à l'angle ACB qui vaut ces deux angles, & à DBC qui est égal par l'hypothese à ACB ; ainsi le triangle DCB ayant les angles sur la base DB égaux, est encore isoscele ; ainsi $DC = BC$.

3°. Les

* *Sup. n. 71.* † *L. 2. n. 83.* ‡ *L. 2. n. 73.*

3°. Les deux triangles isoscelles *BAC* & *BDC*, qui ont un angle commun au point *B* [a], sont équiangles, & partant semblables: donc [b] *AB* est à *BC*, ou à *AD* son égal, comme *DC* ou son égal *AD* est à *DB*, c'est-à-dire, ∺ *AB*. *AD*. *DB*; & par conséquent *AB* est coupé en moyenne & extrême raison, puisque la partie *AD* est moyenne entre la toute *AB*, & l'autre partie *DB* [c].

LEMME II.

Décrire un triangle isoscele, qui ait chacun des angles sur la base double de l'autre. Euclid. IV. Prop. 10. 149

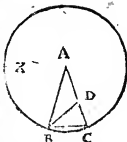
Ayant la ligne *AB*, il la faut diviser en moyenne & extrême raison au point *D* [d]; de *B* & de *D*, & de l'intervalle de la médiane *AD*, je fais deux arcs qui se coupent au point *C*. Ainsi $BC = DC = AD$. Les deux triangles *ADC* & *DCB* sont donc isoscelles. Par la même construction ∺ *AB*. *AD*. *DB*. Mettant en la place des lignes égales *AB*. *BC* :: *BC*. *BD*; donc *BAC* & *DBC* sont semblables, ou équiangles [e] & isoscelles. Or l'angle *BDC* est égal à $DAC + ACD$ les opposez interieurs qui sont égaux, puisque *ADC* est isoscele: Donc *DBC* égal à *BDC* est le double de *BAC*; ce qu'il falloit prouver.

LEMME III.

Dans un triangle isoscele, dont le sommet est au centre du cercle, & qui a pour base le côté du décagone, chaque angle de la base est double de celui du sommet. 150

Le

a *L. 2. n. 85.* b *sup. n. 10.* c *sup. n. 34.*
d *sup. n. 34.* e *sup. n. 13.*



Le triangle iſoſcele *BAC*, a ſon ſommet au centre de *X*. Sa baſe *BC* eſt le côté d'un décagone, & par conſéquent la corde d'un arc de 36 degrez dixieme partie de 360 degrez que vaut le cercle. Il faut prouver que chaque angle de la baſe *CBA* & *ACB*, vaut 72 degrez double de 36; ce qui eſt évident, car les trois angles valent 180 degrez *. Si on ôte 36 de ce nombre, pour la valeur de l'angle du ſommet, reſte 144 pour les angles de la baſe, qui étant égaux, chacun ſera de 72 double de 36.

THEOREME III.

151 *La médiane du rayon coupé en moyenne & extrême raiſon eſt le côté du décagone, ou la corde de trente-ſix degrez.* Euclid. IV. Prop. 10. (*Fig. ci-deſſus.*)

Soit *AC* rayon d'un cercle diviſé en *D* en moyenne & extrême raiſon †, & qu'on ait fait la corde *BC* égale à la médiane *AD*, alors les angles ſur la baſe *BC* ſeront chacun double de *BAC* ‡: donc par le Lemme précédent *BC* eſt la corde de la dixieme partie du cercle, & par conſéquent le côté du décagone.

LEMME IV.

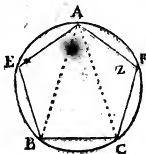
152 *Dans un pentagone ayant tiré deux lignes d'un de ſes angles aux extrémitez du côté oppoſé, cela fera un triangle iſoſcele, & chaque angle ſur la baſe ſera double de celui du ſommet.*

Z eſt un pentagone régulier. De *A* ayant me-

* *L. 2. n. 75.* † *ſup. n. 34.* ‡ *ſup. n. 149.*

mené aux extrémitez du côté oppofé *BC* deux lignes, cela fera le triangle *BAC*, qu'il faut prouver être ifofcele, & que *ABC* & *BCA* font chacun double de *BAC*.

1°. *AB* & *AC* cordes d'arcs égaux, font égales : donc *BAC* eft ifofcele [a].



2°. L'angle *BAC* a pour mefure la moitié de l'arc *BC*, & l'angle *ACB* la moitié de l'arc *AEB* [b]. Or *AEB* eft double de *BC* : donc l'angle *ACB* eft double de l'angle *BAC*. On prouvera de même que *ABC*, eft double de *BAC*.

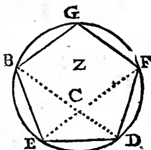
THEOREME IV.

Dans un pentagone, fi deux lignes cordes du double de l'arc que foutient chacun de fes côtez fe coupent, elles font coupées en moyenne & extrême raifon, & la médiane ou la plus grande partie eft un des côtez du pentagone. 153

Dans le pentagone *Z*, que je fuppofe régulier, infcrit dans un cercle, les lignes *BD* & *EF*, chacune corde du double de l'arc dont chaque côté du pentagone eft la corde, fe coupent. Il faut prouver qu'elles le font en moyenne & extrême raifon, & que la médiane ou la plus grande partie, telle que *BC*, eft un des côtez du pentagone.

1°. L'angle *BEF* a pour mefure la moitié des deux arcs *BG* & *GF* [c], & l'angle *BCE*, la moitié des deux arcs *BE* & *FD* [d]. Or ces deux

a *L. 1. n. 31. & L. 2. n. 57.* b *L. 2. n. 39.* c *L. 2. n. 39.* d *L. 2. n. 52.*



deux mesures sont égales: donc ces deux angles sont égaux; ainsi *EBC* est isoscele [a], & partant *BE* = *BC*: ainsi *BC* est un des côtez du pentagone; ce qu'il falloit prouver.

2°. Par la même raison *CF* = *FD*: & puisque *BD* = *FE* cordes des mêmes angles, il faut que *CE*=*CD*: ainsi *ECD* est un isoscele. Le triangle *BED* est aussi isoscele, puisque *BE* = *ED*; car on suppose que *Z* est un pentagone régulier: ces deux isosceles ont un angle commun à *D*; donc ils sont équiangles [b]: partant comme *BD* est à *BE*, ou à son égale *BC*; ainsi *ED* ou son égale *BC* sera à *CD* [c], c'est-à-dire, ÷ *BD*. *BC*. *CD*; & par conséquent, selon la notion de la moyenne & extrême raison, *BD* est coupée comme il a été proposé.

THEOREME V.

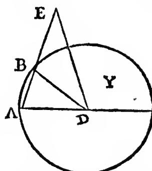
154 *La ligne droite composée du côté de l'hexagone & du décagone inscrits au même cercle, est coupée en moyenne & extrême raison.* Euclid. XIII. Prop. 9.

Soit *AB* côté du décagone, & *BE* côté de l'hexagone, c'est-à-dire, une ligne égale au rayon *BD* [d]; je dis que *AE* est coupée en moyenne & extrême raison au point *B*.

EBD est isoscele, puisque *BE* est supposée égale au rayon *BD*; le triangle *ABD* est aussi isoscele, & l'angle *BAD* ou *ABD* est

a *L.* 2. *n.* 83. b *L.* 1. *n.* 85. c *sup. n.* 10.
d *sup. n.* 142.

est double de BDA [a]. Or DBA est aussi double de BDE, puisqu'il est égal [b] aux deux angles égaux BED, & EDB : donc BED, & BDA sont égaux entre eux, & pris ensemble ils sont égaux à EAD ; ainsi le triangle AED est isoscele ; partant, puisque BD coupe en deux l'angle EDA, il faut que EA soit coupée en moyenne & extrême raison [c] : ce qu'il falloit démontrer.



COROLLAIRE.

155 *De-là il s'ensuit que si* AE *est coupée en moyenne & extrême raison, dont* AB *segment soit côté d'un décagone*, BE *sera le côté de l'hexagone inscrit au même cercle.*

Puisqu'entre AE & AB il n'y peut avoir qu'une moyenne proportionnelle, & qu'on vient de prouver que BE, côté de l'hexagone, étoit cette médiane.

PROBLEME I.

156 *Un cercle étant donné, trouver la corde de trente-six degrez, ou le côté du décagone.* Voyez la Figure de la page 262 num. 150.

Le cercle est X, dont AB est le rayon, que je divise en moyenne & extrême raison en D [d]. Je prens la corde BC égale à AD, qui sera le côté du décagone [e].

PROBLEME II.

157 *Décrire un décagone sur une ligne donnée pour côté.*

Je divise le côté donné BC en moyenne & ex-

M trê-

a *sup. n.* 150. b *L.* 2. *n.* 73. c *sup. n.* 148.
d *sup. n.* 34. e *sup. n.* 151.

trême raiſon [a], je lui ajoute la médiane; ce qui me donne une nouvelle ligne *AC*, auſſi diviſée en moyenne & extrême raiſon, dont *BC* eſt la médiane [b]: de cette ligne *AC* je fais le rayon d'un cercle dont *BC* eſt le côté du décagone [c]; au moyen de quoi j'acheve facilement le décagone requis.

PROBLEME III.

158 *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone, ou inſcrire un pentagone dans un cercle.* Euclid. IV. Prop. 11.

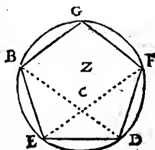
1°. Ayant trouvé le côté du décagone [d] on a celui du pentagone, qui eſt la corde du double de l'arc qui ſoutient un des côtez du décagone.

2°. On peût trouver encore le côté du pentagone de cette maniere. Il faut trouver un triangle iſoſcele, dont les angles de la baſe ſoient chacun double de celui du ſommet [e], & l'inſcrire, ou un qui lui ſoit ſemblable, dans le cercle donné [f]; ce qui donnera un côté du pentagone [g].

PROBLEME IV.

159 *Décrire un pentagone ſur un côté donné.*

Soit le côté donné *ED*. Je ſuppoſe le pentagone fait; en donnant le moyen de trouver les lignes *BD* & *EF*, on découvre ce qu'il faut faire. Or puiſque *BD* eſt coupée en moyenne & extrême raiſon au point *C* [h], que *BC* égale à *BE*, & par conſéquent à *ED*, eſt la médiane, en coupant le côté *ED* en moyenne & extrême raiſon, & lui ajoutant la médiane, on au-



a *ſup. n.* 34. b *ſup. n.* 35. c *ſup. n.* 156. d *ſup n.* 156. e *ſup. n.* 149. f *L.* 2. *n.* 100. g *ſup. n.* 152. h *ſup. n.* 153.

ra une ligne égale à BD *, coupée pareillement en moyenne & extrême raison, dont la médiane sera ED, par conséquent égale à BC.

Comme on connoitra donc les trois côtez du triangle DEB, il sera facile de le faire & d'achever tout le pentagone, soit en circonscrivant un cercle autour de ce triangle †, ou faisant de même le triangle EFD.

PROBLEME V.

Circonscrire un pentagone régulier à un cercle. Eucl. IV. Prop. 12. 160

Il faut, 1°. inscrire un pentagone dans le cercle donné: 2°. mener du centre de ce cercle des lignes droites par les cinq angles du pentagone: 3°. mener des tangentes par les points de la circonference où ces lignes coupent le cercle. Ces tangentes, comme il est évident, formeront le pentagone que l'on cherche.

PROBLEME VI.

Dans un pentagone régulier, inscrire un cercle. Eucl. IV. Prop. 13. 161

Il faut sur le milieu de deux côtez de ce pentagone, élever des perpendiculaires dont la section donnera le centre du cercle que l'on cherche, qu'il faut faire de l'intervalle entre ce centre & le milieu d'un des côtez du pentagne, comme il est évident.

PROBLEME VII.

Circonscrire un cercle à un pentagone. Eucl. IV. Prop. 14. 162

Ayant trouvé comme dans le Problême précédent le centre de ce cercle, il faut prendre l'intervalle de ce centre & d'un des angles du pentagone, & ensuite décrire un cercle qui sera celui que l'on cherche.

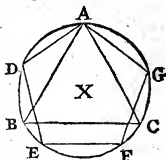
M 2 PRO-

* *sup. n. 35.* † *L. 1. n. 87.*

PROBLEME VIII.

163 *Dans un cercle faire un polygone de quinze côtez.* Eucl. IV. Prop. 16.

Le cercle X étant proposé pour y décrire un quindécagone, 1°. je le partage en six arcs égaux; le rayon est la corde de chacun de ces arcs. 2°. Je prens deux de ces arcs, dont le double est la troisieme partie; ainsi la corde est un côté du triangle équilateral ABC. 3°. Je fais le pentagone $ADEFC$, dont chaque côté est la corde de



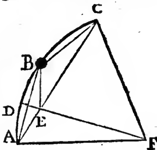
l'arc cinquieme partie du cercle. Celle de l'arc troisieme partie de celui-ci, est le côté du quindécagone, dont cinq côtez font le tiers du cercle, & par conséquent répondent au côté du triangle équilateral. Cela étant, BE est le côté du quindécagone qu'on cherche; car à AD répondent trois parties de ce polygone, & autant à DE. Ainsi à AD & DE répondront six côtez. Mais à AB répondent cinq parties; ainsi reste BE, sixieme partie de AE, pour le côté du quindécagone.

THEOREME VI.

164 *Le quarré d'un des côtez d'un pentagone est égal aux quarrez d'un des côtez du décagone & de l'hexagone, inscrits dans le même cercle.* Eucl. XIII. Prop. 10.

Soit AC le côté d'un pentagone. Ayant divisé l'arc AC en deux parties égales au point B, & mené les cordes AB, BC, elles seront les côtez du décagone, & AF ou FC rayons du cercle, se-

feront les côtez de l'hexagone. Il faut prouver que $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2$.



Soit menée la ligne FD coupant AB en deux parties égales, & du point E soit menée EB; l'on aura les deux triangles ACF & ECF qui sont semblables; car ils ont l'angle C commun: & l'angle CFE est égal à FAC, parce qu'ils sont tous deux d'un égal nombre de degrez, savoir de 54; car l'arc BC étant de 36 degrez & BD de 18; DC sera de 54, mesure de l'angle CFD, auquel est égale CAF à cause que le triangle AFC est isoscele, & que l'angle du centre est de 72 degrez. Ces triangles donc étant semblables $\div AC. AF. EB$ [a]: donc $\overline{AF}^2 = AC \times EC$ [b].

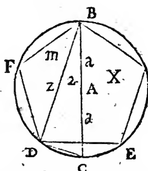
Maintenant le triangle isoscele AEB est semblable à ABC aussi isoscele; car ils ont un angle commun, savoir A; & par conséquent tous les autres égaux[c]. Donc $\div AE. AB. AC$; donc $\overline{AB}^2 = AE \times AC$; donc $\overline{AF}^2 + \overline{AB}^2 = AC \times EC + AE \times AC$. Mais ces deux rectangles sont égaux au quarré de AC [d]; car $AE + EC = AC$. Donc $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Le quarré du côté du pentagone inscrit dans un cercle, & le quarré de la corde qui soutient l'angle du polygone joints ensemble, valent cinq fois le quarré du rayon du cercle. 161

M 3 Soit

a *Sup. n.* 10. b *L.* 3. *n.* 57. c *L.* 2. *n.* 85. d *L.* 3. *n.* 18.



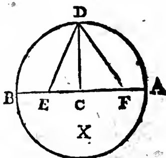
Soit BF côté du pentagone $= b$, & BC diametre du cercle $= 2a$, & BD la soutenante de l'angle F du pentagone $= d$. Il faut prouver que $\overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 = 5\overline{AB}^2$, ou $bb + dd = 5aa$.

Soit mené $DC = c$, qui sera le côté du décagone, & formera le triangle rectangle BDC [a]. Donc $dd + cc = 4aa$ [b]; mais par le Théorême précédent $bb = aa + cc$; joignant cette égalité avec la premiere, on aura pour somme $bb + dd + cc = aa + cc + 4aa$; retranchant cc de part & d'autre, $bb + dd = 5aa$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME IX.

166 *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone & du décagone d'une autre maniere que celle qui a été enseignée.*

Soit AB diametre du cercle donné, & son rayon CD perpendiculaire sur AB; si l'on prend CE moitié de BC, & que du point E l'on mene ED, & qu'ensuite l'on prenne $EF = ED$ & qu'on tire DF; je dis que cette ligne sera le côté du pentagone cherché.



Car [c] $BF \times FC + \overline{EC}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{ED}^2$. Mais $\overline{FD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{FC}^2$ [d],

ainsi

a L. 2. n. 44. b *sup.* n. 78. c L. 2. n. 22. d *sup.* n. 78.

ainsi $BF \times FC + \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{EC}^2$: donc retranchant $\overline{EC}^2$ de part & d'autre, $BF \times FC = \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2$; & remettant cette égalité en proportion [a], on aura $\div BF.\ BC.\ FC$; donc [b] la ligne FB est coupée en moyenne & extrême raison: & puisque BC ou DC est le côté de l'hexagone, FC sera celui du décagone [c]. Mais $\overline{FD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$ [d]: donc DF est le côté du pentagone [e]; ce qu'il falloit trouver.

AVERTISSEMENT.

Cette operation s'abrege de cette maniere. On prend BC *égale au rayon du Cercle*, BD *égale à la corde de nonante, ou au côté du quarré inscrit dans le cercle*, & CE *égale à* BD *: la ligne* DE *sera le côté du pentagone*, & AD *étant le rayon du cercle*, AE *sera le côté du décagone.* 167

Pour démontrer cette operation, de C *j'abaisse une perpendiculaire sur le rayon* AB, & *de* D *sur le centre* A, *la perpendiculaire* AD *: ainsi* BD *est la corde de nonante, à qui* CE *est égale.*

Soit posé AB, AD ou $BC = 2a$; ainsi $BG = 4a$. Or [f] $\div BG.\ BC.\ BF$, c'est-à-dire, $\div 4a.\ 2a.\ a$; donc BF est la moitié du rayon. Mais on a vu dans le présent Théorême, que pour trouver ED côté du pentagone, on a fait $FE = FD$. Si donc dans la présente construction on prouve que cette égalité s'y rencontre, elle en fera la démonstration.

 Puis-

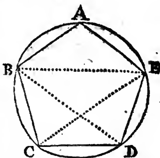
a *L.* 3 *n.* 58. b *sup. n.* 34. c *sup. n.* 154. d *sup. n.* 78. e *sup. n.* 164. f *sup. n.* 28.

Puisque $FB = a$, FG sera $= 3a$, le rectangle $GF \times FB$, c'est-à-dire, $3aa = \overline{FC}^2$ [a]. Or AB & AD étant chacun $2a$, leurs quarrez seront ensemble $8aa = \overline{DB}^2$ [b] $= \overline{CE}^2$ par la construction, lequel est égal $\overline{CF}^2 + \overline{EF}^2$. Si donc de $\overline{CE}^2 = 8aa$ on ôte $\overline{FC}^2 = 3aa$, restera $5aa$ pour $\overline{EF}^2$, à quoi est aussi égal $\overline{FD}^2$ puisqu'il est égal [c] à $\overline{DA}^2 + \overline{AF}^2$, c'est-à-dire, à $4aa + aa$: partant $FD = FE$; c'est ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME VII.

161 *Si dans un pentagone équilateral trois angles pris comme on voudra sont égaux, il sera équiangle.* Eucl. XIII. Prop. 7.

Soit le pentagone équilateral $ABCDE$, qui a trois de ses angles pris comme on voudra, égaux, savoir, A, C, D; il faut prouver que tous sont égaux, que $C = B = E$.



Les triangles BAE, BCD, CDE étant isosceles, dont les angles A, C, D égaux sont compris par les côtez égaux, ils seront en tout égaux [d]; & ainsi les bases BE, BD, CE seront égales, comme aussi tous les angles formez par les côtez égaux sur les dites bases seront égaux. De même les deux triangles BEC, EBD isoscelesayant tous leurs côtez égaux, auront aussi les angles EBC, ECB, BED, BDE égaux

a *sup. n.* 28. & *L.* 3. *n.* 57. b *sup. n.* 78. c *sup. n.* 78.
d *L.* 2. *n.* 98.

égaux [a]. Si à chacun des angles égaux EBC, ECB on ajoute les égaux ABE, DCE, le total B sera égal au total C. La même chose est pour les angles E & D, partant tous ces cinq angles seront égaux ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

Quand le rayon d'un cercle est rationnel, le côté du décagone inscrit dans ce cercle est incommensurable, tant en lui-même qu'en puissance, avec ce rayon. 169

Soit B ligne rationnelle rayon d'un cercle, coupée en moyenne & extrême raison : x que je suppose être la médiane, sera le côté du décagone [b]. Or la médiane x est incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec B [c].

THEOREME IX.

Lorsque le rayon d'un cercle est rationnel, les côtez du pentagone inscrit dans ce cercle sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance, avec ce rayon. Eucl. XIII. Prop. 11. 170

Soit b ligne, rationnelle rayon d'un cercle, z le côté d'un pentagone, & x le côté d'un décagone, inscrits dans le cercle dont b est le rayon. Partant $bb + xx = zz$ [d] : donc puisque le quarré xx n'est pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Théorême, le quarré zz ne peut être rationnel [e], par conséquent sa racine z n'est pas rationnelle, puisque tout quarré qui n'est pas égal à un nombre quarré, ne peut avoir pour racine une grandeur précisément égale à un nombre, comme nous l'avons prouvé ci-dessus [f].

De la quadrature du Cercle.

Nous avons vu [g] que la surface du cercle est égale à un triangle, qui a pour hauteur le rayon de 171

M 5

a *L.* 2. *n.* 92. b *sup. n.* 151. c *sup. n.* 140. d *sup. n.* 164. e *sup. n.* 116. f *sup. n.* 114. g *L.* 2. *n.* 154.

*de ce cercle, & pour base la circonference; ainsi une moyenne proportionnelle entre le rayon & la circonference, sera le côté d'un quarré égal au cercle. Mais pour trouver cette moyenne proportionnelle, il faudroit, le rayon étant donné, trouver une ligne droite égale à la circonference, qu'on ne peut trouver, à moins de connoitre la raison du rayon à la circonference, qui n'est point connue exactement, mais à peu près. Le cercle peut être pris pour un polygone d'un nombre infini de côtez; le moyen donc le plus exact & le moins défectueux de trouver ladite raison, c'est de prendre le plus grand polygone qu'on pourra; & de voir quelle est la raison de son circuit avec le diametre du cercle où il est inscrit. Archimede a consideré un polygone de nonante-six côtez, dont le circuit est au diametre du cercle comme 223 à 71, laquelle raison est moindre que celle de la circonference du cercle au diametre, puisque ce polygone inscrit est plus petit que le cercle *. Archimede comparant un même polygone, mais circonscrit, avec le diametre, il a trouvé que la raison de l'un à l'autre étoit comme 22 à 7, laquelle est plus grande que celle de la circonference du cercle avec le diametre, puisque ce polygone circonscrit est plus grand que le cercle. On a donc deux raisons, savoir celles de 223 à 71, & de 22 à 7, dont l'une est plus petite, & l'autre plus grande que la véritable qu'on cherche. Donnons un même consequent à ces deux raisons, les réduisant à celle-ci, selon ce qu'on a enseigné †.*

1561
1562 497

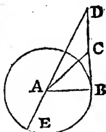
Ayant ainsi supposé le diametre de 497 parties, la circonference du cercle sera plus grande que 1561, & plus petite que 1562. Divisons l'unité qui

* L. 3. n. 147. † L. 3. n. 89.

qui est la difference de ces deux nombres par 497, *le quotient* $\frac{1}{497}$ *fera voir que la difference, dont l'un & l'autre nombre differe de la veritable grandeur de la circonference, est moindre que la* $\frac{1}{497}$ *partie du diametre; ce qui est peu de chose.*

Ceux qui ont pris des polygones plus grands que de nonante-six côtez, ont trouvé une raison plus exacte. Jean Pell en considere un de 256 *côtez, dont chacun est plus petit que* 24545, *posé que le rayon du cercle soit de* 1000000; *ainsi la demie circonference de ce polygone est plus petite que* 3141760. *Si le diametre du cercle étoit donc* 100000, *tout le circuit de ce polygone circonscrit au cercle seroit plus petit que* 314176. *Or ce calcul qu'il fait dans un Ouvrage imprimé à Amsterdam l'an* 1647, *ne suppose aucune extraction de racine. Il est fondé sur le Théorême suivant.* 172

THEOREME.



BC étant la tangente d'un arc moindre qu'un arc de quarante-cinq degrez; & BD la tangente d'un arc double; BC est à BD comme le quarré du rayon AB, moins le quarré de BC, est à deux fois le quarré du rayon AB.

Il faut démontrer que $BC . BD :: \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2$. Puisqu'on suppose que l'angle BAD est double de BAC: donc $AB . AD :: BC . CD$ *, & *componendo* $AB . AD + AB$ (ou DE) :: $BC . BD$ †. Partant $\overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: \overline{BC}^2 . \overline{BD}^2$ ‡.

Alternando, $\overline{AB}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{DE}^2 . \overline{BD}^2$; donc

M 6 di-

* *Sup. n.* 17. † *L.* 3. *n.* 49. ‡ *L.* 3. *n.* 84.

dividendo & componendo $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2 :: \overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 . 2\overline{DE}^2$. Ainsi reste à démontrer que $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 . 2\overline{DE}^2 :: BC . BD$. Car alors $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2 :: BC . BD$, puisque deux raisons égales à une troisieme sont égales entre elles. Or $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + 2AE \times AD + \overline{AD}^2$ *. Mais $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$ (ou $\overline{AE}^2 + \overline{BD}^2$ †.) Donc $\overline{DE}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD + \overline{BD}^2$. Donc retranchant $\overline{BD}^2$ de part d'autre $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD$. Or $2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD = 2AE \times ED$ ‡: Donc $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2$ $2AE \times ED$. Ces deux rectangles $2AE \times ED$ & $2\overline{ED}^2$ ont la même base, savoir ED: ils sont donc entre eux comme AE ou AB est à ED. Or $AB . ED :: BC . BD$: Donc $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2$ égal à $2AE \times ED$ est à $2\overline{ED}^2$ comme BC à BD; ce qu'il falloit montrer.

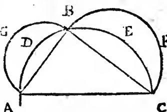
173 *Suivant cette raison qu'Archimede établit de la circonference du cercle à son diametre, savoir celle de* 22 *à* 7, *ou de* 44 *à* 14, *ou de* 66 *à* 21, *qui est toujours la même raison, la surface du cercle est au quarré de son diametre comme* 11 *à* 14. *Car soit nommée* m *la circonference du cercle,* & n *le diametre, multipliant* m & n *par* n, *alors* mn. nn :: m. n. ‡ *Et puisque* m. n :: 44. 14: *donc* mn. nn :: 44. 14. *Donc le quart de*

m n

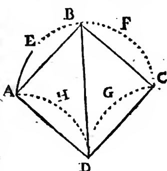
* *L.* 3. *n.* 20. † *L.* 3. *n.* 140. ‡ *L.* 3. *n.* 29. ‡ *L.* 3. *n.* 54.

mn *sera à* nn *comme* 11 *le quart de* 44 *est à* 14. *Or le quart de* mn *est la surface du cercle* * *: donc cette surface est à* nn *quarré du diametre, comme* 11 *est à* 14.

Ainsi on auroit trouvé la quadrature du cercle, si on étoit assuré que la vraye raison de la circonference du cercle à son diametre, est comme 22 *à* 7*; mais cette raison n'est pas juste, & on ne connoit pas encore quelle est la vraye. On connoit néanmoins en partie cette quadrature, c'est-à-dire, qu'on peut assigner une portion de cercle égale à une figure rectiligne; car le triangle* ABC *étant rectangle, le demi-cercle* ADBE *est égal aux deux demi-cercles* AGB *&* BFC †. *Otant donc les parties communes, savoir* ABD *&* BCE, *il restera* AGBDA *&* CEBF *comme deux lunes ou croissans, qui seront égales au reste du demi-cercle* ADBEC, *lequel reste est le triangle* ABC. 174



On voit aussi à l'œil que la figure AEBFCGDH, *semblable au couteau à pié des Cordonniers, est égale au quarré* ABCD*: car par la construction les parties* AHD = AEB = BFC = CGD.

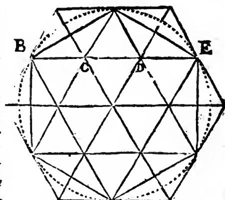


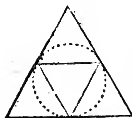
Les seules figures font voir qu'un triangle circonscrit à un cercle est quadruple de l'inscrit, que le quarré circonscrit est le double de l'inscrit, que l'hexa- 175

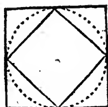
M 7

* *L.* 2. *n.* 154. † *Sup. n.* 79.

l'hexagone circonſcrit eſt à l'inſcrit comme 4 à 3. Remarquez ici en paſſant, que pour couper géométriquement une ligne comme BE *en trois parties égales, il faut faire qu'elle ſoit le côté d'un triangle équilateral inſcrit dans un cercle; après ayant fait l'hexagone & coupé les côtez de l'hexagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperont* BE *en trois parties égales* BC, CD, DE.





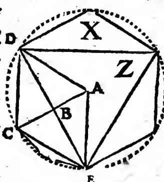


Voilà un Théorême général, qui donne une connoiſſance fort étendue, de ce qu'on peut ſavoir de cette matiere.

176 Quand de deux polygones inſcrits l'un a deux fois plus de côtez que l'autre, le plus grand eſt au plus petit, comme le rayon du cercle eſt à l'apothême du plus petit.

Z eſt un polygone dont l'apothême eſt AB, *& X un polygone qui a deux fois plus de côtez. La ſurface de Z eſt égale à autant de fois le triangle*

gle DAE, *que* Z *a de côtez;* & *il est clair, qu'ajoutant à chacun de ces triangles le triangle* DCE, *on aura la surface de* X *qui est à cele de* Z, *comme le le rhomboïde de* AECD *est au triangle* DAE. *Or ces deux figures sont l'une à l'autre comme le rayon* AC *est à* AB, *qui est l'apothême de* Z; *car les surfaces des deux triangles* DAE & DCE, *qui ont même base, sont comme leur hauteur* AB & BC; *ainsi de tous autres polygones, dont l'un aura deux fois plus de côtez que l'autre.*



Si on divise le polygone X *pour en faire un qui ait deux fois plus de côtez, que je nomme* Y; *il en sera de même:* & *il est bon de remarquer que* Z, *le premier polygone, sera à ce troisieme* Y *comme le plan de l'apothême du premier* & *du second est au quarré du diametre; ce que je démontre ainsi. Soit l'apothême du premier nommé,* m; *celui du second,* n; & *le rayon* k, *selon ce qui a été démontré.*

$$\left\{ \begin{array}{l} Z.\ X :: m.\ k. \\ X.\ Y :: n.\ k. \end{array} \right.$$

En multipliant les antécédens par les antécédens, & *les conséquens par les conséquens,*

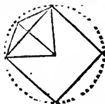
$$ZX.\ XY :: mn.\ kk.$$

Or ZX. XY :: ZY; *donc*, Z. Y :: mn. kk. *Le premier polygone* Z *sera au troisieme polygone* Y, *comme* mn *plan de l'apothême du premier* & *du second est à* kk *quarré du rayon.*

Par cette méthode on démontre que le premier polygone est au quatrieme, comme le solide fait de l'apothême du premier, du second & *du troisie-*

sieme est au cube du rayon du cercle; ainsi de suite à l'infini.

177 *L'apothême d'un quarré inscrit est la moitié d'un des côtez; ainsi un quarré est à un octogone comme la moitié d'un de ses côtez est au rayon du cercle où il est inscrit; ou, ce qui est la même chose, comme un de ses côtez est au diametre du cercle. C'est pourquoi on a droit de conclure qu'un quarré dans un cercle est à un polygone qu'on a fait d'une infinité de côtez en doublant toujours les côtez, c'est-à-dire, d'un quarré qui fait un octogone, d'un octogone un polygone de seize côtez, ainsi de suite, lequel polygone peut être consideré comme un cercle; on peut, dis-je, conclure que le quarré est au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apothêmes de ces polygones, à la plus haute puissance du rayon du cercle. Mais ce n'est presque rien savoir; car outre qu'on rencontre des raisons sourdes, le rayon & le diametre sont divisibles à l'infini; ainsi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apothêmes. Il est donc impossible d'arriver par cette voye enfin à un polygone égal à un cercle. Cette figure est ainsi incompréhensible, quoiqu'elle soit la plus simple de toutes les figures de Géometrie.*



ELE-

ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.



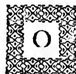
LIVRE CINQUIEME.

De la troisieme espece d'Etendue, c'est-à-dire des Solides ; comment les Solides se forment & se mesurent.

SECTION PREMIERE.

Des Sections & Rencontres des Plans, dont on peut concevoir qu'un Solide est formé.

AVERTISSEMENT.



ON *peut concevoir qu'un Solide, quel qu'il soit, est composé de differens plans posez les uns sur les autres ; ou qu'il est fait par le mouvement d'un seul mû d'une certaine maniere. Aussi, selon que deux ou plusieurs plans se coupent ou se ren-*

rencontrent, ils forment des Solides; ce qui nous oblige en traitant des Solides, de commencer par la rencontre & section des Plans.

Propositions évidentes touchant les Plans.

Proposition I.

1 *Une ligne droite en se mouvant le long d'une autre ligne, qui est droite & immobile, & gardant avec elle une même situation, fait une superficie plane ou un plan.*

Cette superficie a toutes ses parties entre ses extrémitez également posées; car elles sont faites uniformement: Et ce qui fait sa difference des autres superficies, qui ne sont pas planes, c'est que selon la maniere dont elle est faite, on lui peut appliquer en tous sens une ligne droite, comme on le va dire.

Proposition II.

2 *Une ligne droite peut être appliquée en tout sens à une surface plane, & convenir avec elle.*

Proposition III.

3 *La surface d'un plan est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les bornes de ce plan.*

Car un plan est composé de lignes droites, qui sont les plus courtes qu'on puisse concevoir entre leurs extrémitez. Mais je ne dis pas que toute surface qui est la plus courte entre ses bornes, est un plan; car entre deux lignes qui sont à quelque distance l'une de l'autre, & qui ne sont pas posées de la même maniere, si on mene des lignes droites, on fera une superficie la plus courte qui puisse être entre ces

ces deux lignes, mais elle ne sera pas un plan; ainsi quoiqu'il soit vrai que tout plan est une surface la plus courte qu'on conçoive entre ses bornes, néanmoins toute surface la plus courte entre ses bornes n'est pas un plan.

PROPOSITION IV.

4 *Un plan élevé sur un plan est perpendiculaire sur ce plan, lorsqu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre.*

PROPOSITION V.

5 *Deux plans sont paralleles, lorsque dans toutes leurs parties ils sont à une égale distance l'un de l'autre, & qu'étant prolongez ils ne se rencontrent point.*

PROPOSITION VI.

6 *On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtez, autant qu'il sera nécessaire.*

PROPOSITION VII.

7 *Une ligne droite ne peut être en partie sur un plan, & en partie en l'air.* Eucl. XI. Prop. 1.

Car pour-lors cette ligne ne pourroit être appliquée à ce plan, & convenir avec lui; ainsi, selon la seconde Proposition, ce plan ne seroit pas plan. Outre cela on peut concevoir que la partie de cette ligne qui seroit dans le plan étant prolongée, demeureroit toujours dans le plan, ce seroit donc une autre ligne que celle qui seroit en l'air; ces deux lignes néanmoins ayant deux points communs, ne peuvent pas être differentes *.

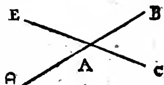
PROPOSITION VIII.

8 *Deux lignes droites qui se coupent peuvent être conçues dans un même plan.* Eucl. XI. Prop. 2.

Les

* *L. 1. n. 16.*

Les lignes *DB* & *EC* se coupent: ayant mené entre *AB* & *AC* des lignes droites, on aura une superficie, qui est un plan: car on y peut appliquer une ligne droite, & cette superficie est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les lignes *AB* & *AC* qui seront sur ce plan; lequel étant prolongé, si *AD* & *AE*, qui sont parties des lignes *BD* & *EC* ne se trouvent pas dans ce même plan, *BD* & *CE* seront en partie sur lui, & en partie en l'air: ce qu'on vient de voir être impossible.



PROPOSITION IX.

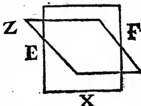
9 *Tout triangle peut être conçu dans un plan.*

C'est une suite de la Proposition précédente.

PROPOSITION X.

10 *La commune section ou rencontre de deux plans est une ligne droite.* Eucl. XI. Prop. 3.

X & *Z* se coupent. Les extrémitez de leur section sont les points *E* & *F*, entre lesquels on a mené une ligne sur *Z* & une sur *X*. Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne, on pourroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite; ce qui est impossible *. La section de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.

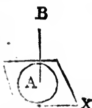


PROPOSITION XI.

11 *Une ligne droite telle que* AB *élevée sur le plan* X, *doit être censée perpendiculaire lorsque de*

* *L. 1. n. 15.*

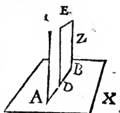
de A *son pié, comme centre, ayant fait un cercle,* B *son sommet est également éloigné de la circonference de ce cercle; & si cela n'est pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.*



Cela est conforme à la notion de la ligne perpendiculaire, qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

PROPOSITION XII.

Concevant que AC *une ligne perpendiculaire sur le plan* X, *est mûe d'un mouvement droit & uniforme selon une ligne droite telle que* AB, *elle fera le plan* Z, *qui sera perpendiculaire en toutes ses parties sur le plan* X. 12



PROPOSITION XIII.

Si la ligne ED *perpendiculaire sur* AB *section de* Z *& de* X *est perpendiculaire sur* X, *tout le plan* Z *est perpendiculaire sur* X. 13

Car on peut concevoir que le plan Z est fait par le mouvement droit & uniforme de *DE* sur *AB*; ainsi par la Proposition précédente, le plan Z est perpendiculaire sur le plan *X*.

THEOREME I.

Entre deux lignes paralleles ou non, qui sont dans un même plan, ou entre une ligne & un point, on ne peut concevoir qu'un même plan, dans lequel est toute ligne droite menée entre deux lignes. 14 Eucl. XI. Prop. 7.

Car si on veut concevoir deux plans, l'un sera plus grand ou plus petit; ce qui ne peut être, puis-

puiſque * toute ſuperficie qui n'eſt pas la plus petite entre ſes bornes, n'eſt pas un plan. Ils seront donc égaux; ce qui étant, ils ne ſont pas differens: car ſi on veut dire qu'ils ſont poſez l'un ſur l'autre, comme ils n'ont point d'épaiſſeur, ils ne peuvent faire qu'un ſeul plan.

THEOREME II.

15 *Deux plans qui conviennent en trois points qui ne ſont pas ſur la même ligne, conviennent entierement.*

1°. Entre deux des points donnez, on ne peut concevoir qu'une ligne droite. 2°. Entre cette ligne droite & le troiſieme point donné, on ne peut concevoir deux differens plans, par la Propoſition précédente: ainſi la partie de ces deux plans entre ces trois points eſt une même choſe; par conſéquent ſi on prolonge cette partie, ce ne ſera qu'un même plan; ainſi ces deux plans ne ſeront pas differens.

COROLLAIRE.

16 *La poſition d'un plan ne dépend donc que de trois points, qui ne ſoient pas ſur une même ligne.*

Ou, ce qui eſt la même choſe, *trois points qui ne ſont pas ſur une même ligne étant donnez, le plan eſt donné.*

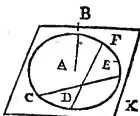
THEOREME III.

17 *Si* B *ſommet de la ligne* AB *élevée ſur le plan* X *eſt également éloigné de* C, D, E *trois points également diſtans de ſon pié* A, *cette ligne eſt perpendiculaire ſur* X.

1°. Concevons dans le plan *X* un cercle également diſtant de *B*, qui paſſe par *C*, *D*, *E*, qu'on a ſuppoſé en égale diſtance de *B*.

2°. Con-

* *ſup. n. 2.*



2°. Concevons un second cercle dont *A* soit le centre, qui passe par les trois points *C*, *D*, *E* aussi également éloignez de *A* par l'hypothese. Ces deux cercles [a] ne sont qu'un même cercle. Donc [b] *AB* est perpendiculaire sur *X*; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME I.

D'un point donné en l'air, comme est B, *abaisser une perpendiculaire sur le point* X. Eucl. XI. Prop. 11. (*même figure.*) 18

Je tire à discretion deux lignes droites *C E* & *D F*, & appliquant une pointe du compas sur *B*, avec l'autre je prens les points *C*, *D*, *E* également distans, par lesquels [c] je fais passer un cercle, au centre duquel je mene de *B* une ligne qui sera perpendiculaire par le Théorême précédent.

THEOREME IV.

Si une ligne est perpendiculaire sur le point de la section de deux lignes qui sont sur le plan, elle l'est sur tout ce plan. Eucl. XI. Prop. 4. 19

Car ayant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de section des points également éloignez, le sommet de la perpendiculaire sur ces lignes sera également éloigné de quatre points qui sont sur ce plan [d]; partant cette ligne sera perpendiculaire sur tout le plan [e].

THEOREME V.

La ligne droite AB, *& toute autre dans le plan* Z *menée par* A *pié de la perpendiculaire* AC 20
sur

a *L.* 1. *n.* 22. b *sup. n.* 11. c *L.* 1. *n.* 87.
d *L.* 1. *n.* 43. e *sup. n.* 11.

ſur ce plan, eſt perpendiculaire ſur AC, *ou* AC *eſt perpendiculaire ſur toutes les lignes droites du plan* Z *qui paſſent par* A.

De *A* pié de la perpendiculaire *AC*, je décris un cercle *X*, & je prolonge la ligne *BA* de ſorte qu'elle coupe *X* en *D* & *B*. Si *C*, ſommet de la perpendiculaire *AC* n'eſt pas également diſtant de *D* & de *B*, alors *A* ne ſera pas perpendiculaire ſur *AB* [a]; mais auſſi *AC* ne ſera pas perpendiculaire ſur le plan Z [b]; ce qui eſt contre l'hypotheſe. *AB* rencontre donc perpendiculairement *AC*; ainſi de toute autre ligne du plan Z, qui paſſe par *A*.

Theoreme VI.

21 *Si* AC *une ligne droite rencontre perpendiculairement dans un même point trois autres lignes droites* AB, AF, AG, *ces trois lignes ſeront en un même plan.* Eucl. XI. Prop. 5. (*même figure.*)

Soient *AB* & *AF* dans le plan Z, & que *AG* n'y ſoit pas, mais ſur un autre plan. Concevant un troiſieme plan *Y* qui paſſe par *AC* & *AG*, & qui étant prolongé coupera Z; cette ligne *AC* ſera perpendiculaire ſur ce plan Z [c]: donc elle le ſera auſſi ſur la ligne de ſection de Z & de *Y* [d], & par la ſuppoſition elle l'eſt ſur *AG*; ainſi ſur *AC* & au même point *A*, il y aura deux perpendiculaires, ce qui ne peut pas être [e].

Probleme II.

22 *Sur le point* A *dans le plan* Z, *élever une per-*

a *L.* 1. *n.* 40. b *ſup. n.* 11. c *ſup. n.* 19.
d *ſup. n.* 20. e *L.* 1. *n.* 49.

perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 12. (*même fig.*)
Il faut de *A* centre faire un cercle ; toute ligne qui descendra d'un point également éloigné de ce cercle, sera la perpendiculaire qu'on demande.

Mais pour trouver méchaniquement ce point, il faut se servir de deux Equerres appliquées par un de leurs côtez sur deux differentes lignes tracées sur ce plan, & au point de leur section, faisant convenir ensemble l'autre côté desdites Equerres ; ce qui se feroit aussi par le moyen d'une ficelle & d'un plomb, si le plan étoit horizontal ou de niveau ; car pour-lors chaque point de la ficelle seroit le point cherché.

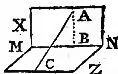
THEOREME VII.

On ne peut d'un point sur un plan élever qu'une perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 13. *fig. précéd.* 23

Que cela ne soit, concevons que sur le même point *A*, on éleve les deux lignes *A E* & *A C* qu'on suppose perpendiculaires, & que de *A* comme centre on décrive *X* un cercle : les points *E* & *C* sommets des deux lignes égales *AE* & *AC* étant differens ne peuvent être également éloignez de la circonference du cercle *X*; partant elles ne sont pas toutes deux perpendiculaires sur le plan *Z* *.

THEOREME VIII.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur ce plan. 24



Soit *A* le point donné au dessus d'un plan d'où on suppose qu'on a mené deux perpendiculaires, sçavoir *A B* & *AC* ; je joins leurs piés *B* & *C* par la ligne *BC*. Ces trois points, *A*, *B*, *C*, font le triangle *ABC* qui se peut concevoir dans un mê-

* *Sup. n.* 10.

même plan [a]. Les angles *ABC* & *ACB* que font les perpendiculaires *AB* & *AC*, sont droits. Donc *ABC* auroit plus de deux angles droits; ce qui ne peut être [b].

COROLLAIRE.

25 *Si le plan* X *est perpendiculaire sur le plan* Z, *& que de* A *point dans le plan* X *on abaisse une perpendiculaire sur* Z, *cette ligne tombera sur* MN *section de* X *& de* Z. Eucl. XI. Prop. 38. (*Même figure.*)

Que cela ne soit, & qu'une perpendiculaire tombe de *A* sur *C* hors de la ligne *MN*; j'abaisse *AB* perpendiculairement sur *MN*; ainsi comme *B* est dans la section de *X* & de *Z*, il y a sur *Z* deux perpendiculaires *AB* & *AC* menées d'un même point *A*; ce qu'on vient de voir être impossible.

THEOREME IX.

26 *La ligne perpendiculaire est la plus courte qu'on puisse mener d'un point hors d'un plan sur ce plan.* (Figure ci-dessus.)

Le point donné est *A*, la ligne *AB* est perpendiculaire, *AC* ne l'est pas. Il faut prouver que *AB*, est plus courte que *AC*. Pour cela je joins *C* & *B* par une ligne droite. Le triangle *ABC* se peut concevoir dans un même plan [c]. Or *AB* perpendiculaire sur *BC*, est plus courte que l'oblique *AC* [d]; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

27 *Donc la mesure de la distance d'un point hors d'un plan, à ce plan, doit être une perpendiculaire*

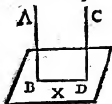
Puisque cette perpendiculaire est la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire.

THEO-

a *sup. n.* 9. b *L.* 2. *n* 79. c *sup. n.* 9. d *L.* 1. *n.* 53.

THEOREME X.

Deux lignes étant perpendiculaires sur un mêm. plan, on les peut concevoir dans un même plan. 28



Concevons qu'on a mené par le pié des deux lignes *AB* & *CD* perpendiculaires sur *X*, une troisieme ligne *BD*, sur laquelle concevons que *AB* ou *CD* se meuve uniformément & toujours perpendiculairement, elles feront un plan [a]; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

AB & CD (même figure) *perpendiculaires sur le plan* X, *sont paralleles; & si de deux paralleles l'une est perpendiculaire sur le plan* X, *l'autre le sera.* Eucl. XI. Prop. 6. & 8. 29

1°. Soit menée la ligne *BD* par le pié de *AB* & de *CD*, lesquelles lignes [b] sont perpendiculaires sur *BD*: donc ces trois lignes *AB*, *CD*, *BD* peuvent être dans un même plan [c]. Ainsi *AB* & *CD* étant perpendiculaires sur *BD*, elles sont paralleles [d].

2°. Si *AB* & *CD* sont paralleles, & que *AB* soit perpendiculaire, je dis que *CD* le sera aussi; car ayant mené *BD*, la ligne *AB* sera perpendiculaire sur *ED* [e]: donc *CD* parallele à *AB*, est aussi perpendiculaire sur *BD* [f]; ce qu'il falloit prouver.

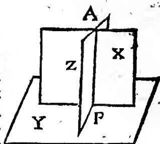
THEOREME XII.

La section AB *de deux plans* Z & X, *qui sont perpendiculaires sur* Y, *est une perpendiculaire sur le même plan.* Eucl. XI. Prop. 19. 30

1°. Cette section est une ligne droite [g], & puisque les plans *Z* & *X* sont perpendiculaires

N 2 sur

a *sup. n.* 1. b *sup. n.* 20. c *sup. n.* 28. d *L.* 1. *n.* 68.
e *sup. n.* 20. f *L.* 1. *n.* 69. g *sup. n.* 10.



sur *Y*, la ligne *AP* entant qu'elle est considerée en *Z* ne peut être conçue penchante de part & d'autre de *Z*: Et par la même raison, entant qu'elle est considerée en *X*, on ne peut pas concevoir qu'elle panche de côté ou d'autre de ce plan; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan *Y* également éloignez de *P*, qui seront aussi également éloignez de *A*; ainsi *AP* est perpendiculaire sur le plan *Y* *.

THEOREME XIII.

31 *La section de* X *&* *de* Z *étant perpendiculaire sur* Y, *ces deux plans & quelque autre que ce soit dont* AP *sera la section*, *seront perpendiculaires sur* Y. Eucl. XI. Prop. 18. (*même fig.*)

Car tous ces plans peuvent être conçus faits par le mouvement de *AP* †.

THEOREME XIV.

32 *Si trois points dans un même plan*, *&* *non sur une même ligne*, *sont également distans d'un second plan*, *ces deux plans sont paralleles.*

La position d'un plan ne dépend que de trois points ‡; par conséquent si trois points d'un plan sont également distans d'un second plan, ces deux plans sont également distans dans tous leurs autres; ainsi ils sont paralleles.

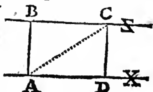
THEOREME XV.

33 *Les plans* X *&* Z *étant paralleles*, *si la ligne* AB *est perpendiculaire sur* X, *elle le sera aussi sur* Z. *Et si* AB *est perpendiculaire sur* X *&* *sur* Z, *ces deux plans sont paralleles.* Eucl. XI. Prop. 14.

Si

* *Sup. n.* 17. † *Sup. n.* 12. ‡ *Sup. n.* 16.

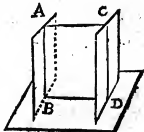
Si on prétend que *AB* perpendiculaire sur *X* ne l'est pas sur *Z*, concevons qu'on ait élevé au point *A* vers *Z* une ligne perpendiculaire telle que *AC*, elle sera plus courte que *AB* *. De *C* je conçois une perpendiculaire sur *X*, qui sera encore plus courte que *AC*, partant plus que *AB*; ainsi le point *D* s'approchera plus de *Z* que *A*; ainsi *X* & *Z* n'étant pas en égale distance, ils ne sont pas paralleles; ce qui est contre l'hypothese. Une ligne donc qui est perpendiculaire sur l'un de ces plans, l'est aussi sur l'autre. Le reste est aisé.



THEOREME XVI.

Les sections AB & CD *de deux plans paralleles coupez par un troisieme plan, sont des lignes paralleles.* Eucl. XI. Prop. 16. 34

Ces sections *AB* & *CD* sont des lignes droites †, lesquelles sont dans le troisieme plan, où étant prolongées, elles se rencontreroient si elles n'étoient pas paralleles; par conséquent les deux autres plans où elles sont étant prolongez, se rencontreroient aussi, ainsi ils ne seroient pas paralleles, contre la supposition. On ne peut donc pas dire que *AB* & *CD* ne sont pas paralleles.



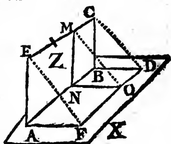
THEOREME XVII.

Les lignes droites paralleles à une même, quoique sur differens plans, sont paralleles entre elles. Eucl. XI. Prop. 9. 35

 Soit

* L. I. n. 53. † *Sup.* n. 10.

Soit *CE* parallele à *AB*, à laquelle *DF* dans un autre plan est aussi parallele ; je dis que *CE* & *DF* sont paralleles entre elles.



Du point *B* j'éleve sur *AB* perpendiculairement *BC* & *BD*, coupant *CE*, *DF*, aux points *C* & *D*. On peut concevoir un plan par les trois points *BCD* [a]; *AB* perpendiculaire, tant sur *BD*, que sur *BC*, sera perpendiculaire sur ce plan [b]; mais *CE* & *DF* étant posées paralleles à *AB*, seront aussi perpendiculaires sur ledit plan & paralleles entre elles [c]; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVIII.

36 *Toutes lignes paralleles dans le plan* X, *rencontrant d'autres lignes aussi paralleles dans le plan* Z, *font entre elles les angles égaux.* Euclid. XI. Prop. 10. (*Même figure.*)

BD & *NO* sont paralleles entre elles sur le plan *X*; & *BC*, & *MN* sur le plan *Z*: il faut prouver que l'angle *CBD* est égal à *MNO*. Pour cela je mene *DF* & *CE* paralleles à *AB*. Puisque les paralleles entre paralleles sont égales, car elles font les mêmes angles [d], par conséquent égales [e]; puisque, dis-je, *CE* est parallele à *DF* par le Théorême précedent: partant $BD = NO$ & $BC = NM$ & $CD = MO$; donc les triangles *CBD* & *MNO* sont égaux & semblables, ainsi l'angle *CBD* est égal à *MNO*; ce qu'il falloit démontrer.

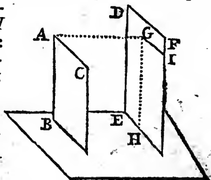
THEO-

a *sup. n.* 9. b *sup. n.* 19. c *sup. n.* 29.
d *L.* 2. *n.* 27. e *L.* 2. *n.* 110.

THEOREME XIX.

Deux lignes AB & AC *qui se rencontrent au point* A, & *sont paralleles à deux autres lignes* ED & DF *qui se rencontrent en* D, *si elles ne sont point sur un même plan, les plans* BC & EF, *sont paralleles.* Eucl. XI. Prop. 15. 37

De *A* soit menée une perpendiculaire sur le plan *EF* qu'elle rencontre au point *G*, duquel je mene *GH* parallele à *DE*, & *GI* parallele à *DF*: donc par le Théorême 17 *, *AB* & *GH* sont paralleles, comme aussi *AC* & *GI*: ainsi *AG* étant perpendiculaire sur *GI* & sur *GH* par la



construction, le sera aussi sur *AC* & sur *AB* †, & partant sur le plan *BAC* ⸸: ainsi il faut que ces deux plans soient paralleles; car s'ils ne l'étoient pas, ils se rencontreroient étant prolongez en quelque point, d'où aux points *A* & *G*, on pourroit mener des lignes droites qui ne seroient donc pas paralleles, contre ce qui a été démontré, puisque *AG* étant perpendiculaire sur lesdits plans, le doit être sur toutes les lignes tirées sur eux par les points *A* & *G* ‡; ce qui ne seroit pas, si ces lignes concouroient.

THEOREME XX.

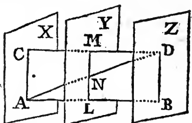
Deux lignes droites coupées par des plans paralleles, sont coupées proportionnellement. Eucl. XI. Prop. 17. 38

Soient deux lignes droites *AB*, *CD*, coupées par

N 4

* *sup. n.* 35. † *L.* 1. *n.* 69. ⸸ *sup. n.* 19. ‡ *sup. n.* 20.

par trois plans paralleles X, Y, Z, aux points A, L, B, D, M, C; je dis qu'elles font coupées proportionnellement, c'est-à-dire $AL.LB :: CM.MD$.



Car fur chaque plan des extrémitez X & Z, foient joints les points de fection par les droites AC & BD, & tirée la diagonale AD rencontrant le plan Y au point N, duquel on tirera par les points de fection L & M les lignes LN & MN. Le triangle ABD pourra être conçu dans un plan [a], comme auffi celui ADC dans un autre, fi ce n'eft pas le même. Chacun des plans de ces triangles étant coupé par des plans paralleles, les lignes de fection feront paralleles [b], & ces triangles feront ainfi coupez parallelement à leurs bafes, & partant $AL. LB :: AN. ND :: CM. MD$ [c], & conféquemment $AL. LB :: CM. MD$ [d]; ce qu'il falloit prouver. La même chofe feroit, s'il y avoit plus de trois plans & plus de lignes.

SEC-

a *fup. n.* 9. b *fup. n.* 234. c *L.* 4. *n.* 16. d *L.* 3. *n.* 53.

SECTION II.

De la composition des Solides selon leurs surfaces, & selon leur solidité.

DEFINITION I.

Lorsque trois ou plusieurs angles plans, qui sont sur differens plans, ou qui n'ont pas une même base, se rencontrent dans leur sommet, l'angle qu'ils comprennent se nomme Solide. 39

Deux seuls angles plans ne peuvent renfermer un angle solide; ainsi pour le faire, il faut tout au moins trois angles plans, qui se coupent ou se rencontrent en aboutissant à un point, comme un diamant bien taillé.

DEFINITION II.

Les solides compris entre des surfaces droites, ou plans paralleles, se nomment Parallelépipedes. 40

DEFINITION III.

Les solides qui sont compris entre des plans tous égaux & semblables, sont nommez Polyedres. *On les nomme Réguliers, lorsque les figures qui les comprennent sont régulieres, & que tous les angles sont égaux.* 41

DEFINITION IV.

Le nombre des faces planes d'un solide régulier, lui donnent un nom particulier. 42

1°. *Il s'appelle* Tetraëdre, *lorsqu'il est compris sous quatre triangles équilateraux & égaux.*

2°. Exaëdre, *quand il est compris sous six quarrez égaux; c'est le cube, fait comme un dé à jouer.*

3°. Octaëdre, *lorsqu'il est compris sous huit triangles égaux & équilateraux.*

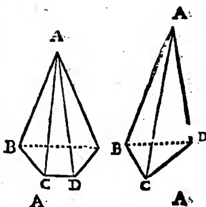
4°. Dodecaëdre, *lorsqu'il est compris sous douze pentagones égaux & équilateraux.*

5°. Icosaëdre, *lorsqu'il est composé de 20 triangles équilateraux & égaux.*

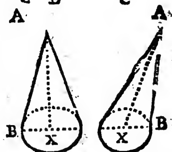
DEFINITION V.

43 *Une ligne, dont le sommet est immobile, parcourant par le pié une figure;*

1°. *Si cette figure est un polygone, cette ligne décrira un solide, qu'on nomme* Pyramide, *tel que* ABCD.



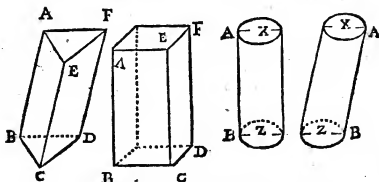
2°. *Si cette figure que parcourt le pié de la ligne est un cercle, le solide est un* Cône, *tel que* X.



Dans ces figures la ligne du sommet au centre de la base, s'appelle l'Axe du Solide, qui se nomme droit ou oblique, si cette ligne fait un angle droit ou oblique sur sa base.

3°. *Si le sommet de la ligne, qui décrit le solide, n'est pas immobile, & que dans le tems que son pié parcourt la base, son sommet parcoure une figure égale, semblable, & semblablement posée, telle qu'*ABCDEF; *ce sera un* Prisme.

4.



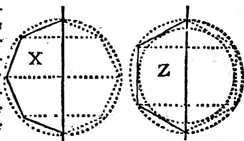
4°. *Si la base est un cercle, ce sera un* cylindre, *tel que* ABXZ.

DEFINITION VI.

Si un cercle tourne autour de son diametre, il décrit une Sphere, *dont ce diametre s'appelle* l'Axe; *le centre du cercle, dont la révolution a fait la Sphere, est* le centre *de la Sphere; les lignes tirées de ce centre à la circonference en sont* les rayons; *celles qui passent par le centre, & se terminent à la circonference, sont les* diametres. 44

DEFINITION VII.

Un polygone régulier en tournant sur une ligne droite qui passe par son centre, décrit ce qu'on appelle un Spheroïde, *c'est-à-dire, une espece de Sphere, tel qu'est* X & Z. 45



DEFINITION VIII.

46 *Un solide* A *est dit* circonscrit *à un autre solide* B *qu'il contient, s'il est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer* B; *ou bien, si* B *est le plus grand de tous les solides semblables que* A *peut renfermer.*

DEFINITION IX.

47 *Un solide* B *est dit* inscrit *dans un autre solide* A *où il est renfermé, s'il est le plus grand de tous les solides semblables qui puissent être renfermez dans* A; *ou ce qui est la même chose, si* A *est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent le renfermer.*

DEFINITION X.

48 *Corps régulier est celui qui est compris entre des figures semblables, régulieres & égales, duquel aussi tous les angles solides sont égaux.*

On démontrera dans la suite, qu'il n'y a que cinq corps réguliers.

THEOREME I.

49 *Si un angle solide est compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris ensemble comme on voudra, sont plus grands que le troisieme.* Eucl. XI. Prop. 20.

Les trois angles plans *BAD*, *BAC*, *CAD* font un angle solide ; il faut prouver que deux de ces angles plans pris ensemble sont plus grands que le troisieme ; que par exemple *BAD* $\angle$ *BAG* + *CAD*. Entre les lignes *AB* & *AD*, aucun plan n'est plus petit que *BAD* *; partant le plan droit *BAD* est plus petit que le plan creux *ABCD*. On démontrera de la même maniere, que l'angle plan *BAC* est plus petit que *BAD* avec *CAD*.

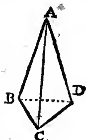
Co-

* *sup. n. 3.*

COROLLAIRE.

Les côtez des trois angles plans, qui font un angle solide, ayant été pris égaux, les bases de ces trois angles plans, font un triangle. Eucl. XI. Prop. 22. (*Même figure.*) 50

* Soient faits égaux les trois lignes *AB*, *AC*, *AD*, côtez des trois angles plans, qui font l'angle solide *A*; il faut démontrer que les trois lignes *BC*, *CD*, *DB*, bases des trois angles plans *BAC*, *CAD*, *DAB*, font un triangle. Pour céla * il suffit que deux de ces lignes prises ensemble, soient plus grandes que la troisieme. Or cela est ainsi, car ces deux angles dont ces lignes sont les bases, seront plus grands que l'angle qui est sur la troisieme; & par conséquent cette troisieme ligne est plus petite †.



THEOREME II.

Tous les angles plans qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits. Eucl. XI. Prop. 21. 51

1°. Commençons par l'angle solide *A*, composé de trois plans: par le Théorême précédent les angles *BCA* + *DCA* sont plus grands que l'angle *BCD*, & de même *ADC* + *ADB* plus grands que *CDB*; comme aussi *ABD* + *ABC* plus grands que *DBC*. Ainsi les six angles des bases des trois triangles qui forment l'angle solide *A*, sont plus grands que les trois triangles du triangle *BCD*, c'est-à-dire, plus grands que deux droits ‡. Or tous les angles des trois triangles qui forment ledit angle

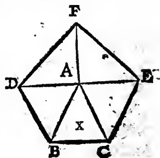
N 7 so-

* *L. 2. n. 67.* † *L. 2. n. 104.* ‡ *L. 2. n. 75.*

solide A, sont ensemble égaux à six droits *. Si donc de cette somme on ôte plus que deux droits, valeur des six angles sur la base, il restera moins de quatre droits pour la valeur de l'angle solide A; ce qu'il falloit prouver.

2°. Par la même méthode on montrera que les angles solides formez par quatre plans, sont aussi moindres que quatre droits.

3°. Si X est un triangle solide compris par cinq triangles, dont le sommet doit être conçu en l'air, on prouvera aussi que l'angle DBC est plus petit que les deux angles DBA & CBA, par le Théorême précédent, & l'angle BCE est plus petit que les angles ACB & ACE pris ensemble, de même des autres. Mais aussi tous les angles du polygone $BCEFD$, base de l'angle solide, sont égaux à six angles droits †; ainsi tous les angles de la base des cinq triangles qui font l'angle solide X sont plus grands que six droits, puisqu'ils sont plus grands que les angles du polygone, comme on vient de voir. Tous les angles de ces cinq triangles qui font l'angle solide valent dix droits; donc puisque ceux de leurs bases valent plus de six droits, ceux des sommets valent moins que quatre droits: ce qu'il falloit démontrer.



On peut démontrer ce Théorême en cette maniere. Concevons, 1°. que A *est un point dans un plan, & le sommet de plusieurs triangles dont les côtez de* X *sont les bases. Tous ces angles autour*

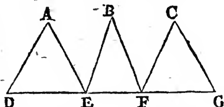
* L. 2. n. 75. † L. 2. n. 123.

tour de A *ne valent que quatre angles droits*, 2°. *Si on leve le point* A, *alors les angles du sommet de ces triangles deviendront plus petits*, * *ayant mêmes bases & les côtez plus grands; ce qui étant, tous ces angles vaudront moins que quatre angles droits.*

PROBLEME I.

Ayant trois triangles plans, dont deux pris ensemble sont plus grands que le troisieme, mais qui tous ensemble sont moindres que quatre angles droits, faire un angle solide. Euclid. XI. Prop. 23. 52

Soient ces trois triangles plans *A*, *B*, *C*, il n'y a qu'à les joindre en un même point de maniere, que les côtez qui les renferment conviennent ensemble, c'est-à-dire; que *AE* s'unisse avec *BE*, *BF* avec *CF*, & *CG* avec *AD*; cela formera l'angle solide demandé, suivant la Définition †.



PROBLEME II.

Sur une ligne droite donnée, & à un point donné en cette ligne, faire un angle solide égal à un angle solide donné. Eucl. XI. Prop. 26. 53

Soit une ligne donnée *AD*, & *A* un point dans cette ligne, il faut faire au point *A* un angle solide donné. Soient les trois plans de cet angle donné *DAE*, *EBF*, *FCG*; ayant fait trois autres plans égaux, & les joignant au point *A* en la maniere qu'il vient d'être expliqué au précédent Problême, il est évident qu'ils feront l'angle solide requis.

THEO-

* *L. 2. n. 99.* † *sup. n. 39.*

THEOREME III.

54 *S'il y a deux angles plans égaux, aux sommets desquels on leve en l'air deux lignes droites, faisant angles égaux avec les lignes des angles premierement posez chacun au sien: & d'un point pris au haut de chacune de ces deux lignes élevées, sont menées des lignes perpendiculaires aux plans où sont les angles premierement posez, & des points où tombent ces perpendiculaire, sont tirées des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: les angles que font ces lignes avec les levées en l'air, sont égaux entre eux.* Eucl. XI. Prop. 35.

Euclide fait cette Propofition, pour démontrer d'autres Propofitions dans la fuite de fes Elémens. Je n'en ai pas befoin; ainfi je la paffe.

THEOREME IV.

55 *Il ne peut y avoir plus de cinq differens corps réguliers.*

C'eft-à-dire, cinq differens folides compris fous des figures planes régulieres toutes égales & femblables, & dont tous les angles foient égaux. Dans une Sphere, tout eft égal; mais il s'agit d'un folide compris fous des plans. On a prouvé que tous les angles plans, qui comprennent un angle folide, valent moins que quatre angles droits. Voyons quelles font les figures planes, femblables, régulieres, égales, qui puiffent faire un angle folide.

1°. Trois triangles égaux & équilateraux peuvent faire un angle folide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle folide, ne valent que trois fois foixante degrez, chacun des angles d'un équilateral étant de foixante. Trois de fes triangles joints enfem-

semble en pourront donc faire un, tel que sont ceux du Tetraëdre.

2°. Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle solide; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois soixante; ce qui est moins que quatre droits. L'Octaëdre est fait de quatre de ces triangles.

3°. Cinq de ces triangles peuvent encore faire un angle solide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois soixante degrez; ce qui est moins que quatre angles droits. L'angle de l'Icosaëdre est fait par cinq de ces triangles.

Six triangles équilateraux ne peuvent faire un angle solide; car les six angles plans qu'ils comprennent, valent quatre angles droits, six fois soixante faisant trois cens soixante valeur de quatre angles droits; ainsi ces six triangles feroient un angle plan, & non un angle solide *.

4°. Trois angles d'un quarré peuvent faire un angle solide; car ils valent moins que quatre angles droits. L'angle du cube est composé de trois angles du quarré. On ne peut concevoir d'autre solide fait de quarrez: car quatre ne peuvent faire un angle solide; à plus forte raison, ni cinq, ni six.

5°. Trois pentagones peuvent faire un angle solide; car leurs angles ne font que 324 degrez, ce qui est moins que quatre angles droits. Chaque angle du Dodecaëdre est fait de trois pentagones. Plus de trois pentagones ne peuvent faire un angle solide; car quatre font 432, ce qui passe la valeur de quatre angles droits.

Trois hexagones ne peuvent faire un angle so-

li-

* *Sup. n. 58.*

lide ; car chacun étant de 120 degrez, les trois font 360, qui valent quatre droits : ainsi ils ne peuvent pas faire un angle solide *. Plus est grand le nombre des côtez d'un polygone, l'angle de la figure est plus grand ; ainsi si trois hexagones ne peuvent faire un angle solide, à plus forte raison trois heptagones ne le peuvent pas ; ainsi il n'y a que le triangle équilateral, le quarré & le pentagone, qui le puissent : mais on peut faire un angle solide de trois équilateraux, de quatre & de cinq ; il ne peut donc y avoir que cinq differens corps réguliers.

PROPOSITIONS EVIDENTES.

PROPOSITION I.

56 *Une figure est plus grande que celle autour de laquelle elle est circonscrite, & plus petite que celle dans laquelle elle est inscrite.*

PROPOSITION II.

57 *De deux Prismes de même hauteur, celui dont la base est moindre, & qui par conséquent peut être comprise en celle de l'autre, est plus petit.*

Car il est évident qu'il y est contenu. Or ce qui contient, est plus grand, que ce qui est contenu.

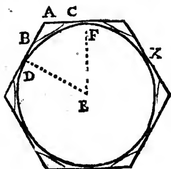
PROPOSITION III.

58 *De deux Prismes circonscrits à un cylindre, celui-là approche plus du cylindre, qui a plus de côtez.*

La base du cylindre proposé est X ; celle du prisme qui a moins de côtez, & qui est circonscrit au cylindre, soit nommée Y, & Z celle d'un

* *Sup. n. 51.*

d'un autre priſme qui a plus de côtez, & qui eſt circonſcrit au même cylindre. Le polygone Z * eſt plus petit que le polygone Υ: les priſmes dont ces polygones ſont les baſes, ſont de même hauteur, étant circonſcrits à un même cylindre, donc † celui qui ſera ſur Z, & qui a ainſi plus de côtez, eſt plus petit que celui qui en a moins, & dont Υ eſt la baſe; ainſi il approche plus du cylindre; ce qu'il falloit démontrer.



PROPOSITION IV

Donc un priſme d'une infinité de côtez approche ſi près du cylindre, qu'il n'y a point de difference; ainſi on peut ſuppoſer que le cylindre eſt un priſme d'une infinité de côtez. 59.

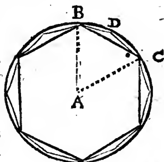
PROPOSITION V.

De deux priſmes inſcrits dans un cylindre, celui-là approche plus du cylindre, qui a plus de côtez. 60

La baſe du cylindre propoſé eſt X, les deux polygones Z & Υ inſcrits dans ce cercle ſoient les baſes de deux priſmes inſcrits dans ce cylindre dont X eſt la baſe.

Le polygone Υ qui a plus de côtez eſt plus grand, & approche plus du cercle que le polygone Z ‡. Ces deux priſmes, dont Z & Υ

* L. 2. n. 149. † ſup. n. 57. ‡ L. 2. n. 151.



Y sont les bases, sont de même hauteur, étant inscrits dans un même cylindre ; donc le prisme qui est sur *Y* est plus grand, que celui qui est sur *Z* *. Ainsi il approche plus du cylindre ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VI.

61 *De deux pyramides de même hauteur, celle qui a une plus grande base est la plus grande.*

Car il est évident que si l'on conçoit que l'une soit mise dans l'autre, celle qui a une plus grande base contiendra celle qui en a une plus petite.

PROPOSITION VII.

62 *De deux pyramides circonscrites à un cône, celle qui a plus de côtez approche plus du cône.*

PROPOSITION VIII.

63 *De deux pyramides inscrites dans un cône, celle qui a plus de côtez approche plus du cône.*

PROPOSITION IX.

64 *Donc on peut supposer qu'un cône est une pyramide d'une infinité de côtez.*

PROPOSITION X.

65 *Plus un polygone a de côtez, le spheroïde qu'il forme approche plus de la sphere autour de laquelle il est circonscrit.*

Car plus le polygone, qu'on peut appeller le Générateur du spheroïde, aura de côtez, plus il

* *Sup. n. 56.*

il approchera du cercle ; ainsi le spheroïde qu'il décrira par sa révolution approchera plus de la sphere à laquelle il est circonscrit ; ce qu'il falloit démontrer.

P R O P O S I T I O N XI.

Donc une sphere peut être prise pour un spheroïde formé par un polygone d'une infinité de côtez. 66

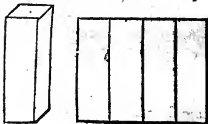
SECTION III.

De la surface des Solides.

T H E O R E M E I.

LA surface d'un prisme droit est égale à un parallelogramme qui est de même hauteur que ce prisme, & dont la base est égale au circuit de ce prisme. 67

Les surfaces d'un prisme droit sont des parallelogrammes tous de même hauteur, dont les bases prises ensemble font le circuit de ce prisme : ils sont donc égaux à un parallelogramme de la hauteur du prisme, & dont la base est égale à son circuit ; ce qui est évident.

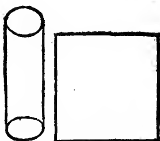


On n'y comprend point les surfaces des bases.

Co-

COROLLAIRE I.

68 *Donc puisqu'un cylindre droit peut être pris pour un prisme* * *d'une infinité de côtez, sa surface est égale à un parallelogramme de même hauteur, dont la base est égale à la circonference du cercle, qui est la base du cylindre.*



COROLLAIRE II.

69 *Donc tout ce qui a été démontré de la raison qu'ont les parallelogrammes entre eux, convient aux surfaces des cylindres.*

1°. Les surfaces de deux cylindres sont l'une à l'autre en raison composée de leur hauteur, & du circuit de leur base.

2°. Dans deux cylindres, si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, c'est-à-dire, si la raison de leurs surfaces est composée de deux raisons égales, cette raison est doublée †.

3°. Si deux cylindres ont leurs hauteurs ou leurs bases égales, leurs surfaces sont entre elles comme les inégales ‡.

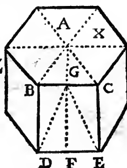
THEOREME II.

70 *La surface d'un prisme est double de celle du polygone qui est sa base, s'il a pour hauteur l'apothême de ce polygone.*

Soit *Z* un prisme, dont le polygone *X* est sa base. L'apothême de *X* est *AG*, c'est-à-dire, une perpendiculaire tirée de son centre *A* sur *BC* un de ses côtez; il faut démontrer que si *FG*,

* *sup. n.* 59. † *L.* 4. *n.* 71. ‡ *L.* 4. *n.* 75.

FG, hauteur de *Z* eſt égale à *AG* apothême de *X*, la ſurface de *Z* ſera double de *X*.



Ayant mené de tous les angles du polygone *X* des lignes au centre *A*, on fait autant de triangles que Z a de faces, leſquelles faces ſont des parallelogrammes. Or ces parallelogrammes, comme eſt *BCED*, & ces triangles comme eſt *ABC*, ont même hauteur & même baſe : donc ces parallelogrammes ſont doubles de ces triangles *, & par conſéquent la ſurface de *Z* compoſée de ce parallelogramme eſt double de celle de *X*, égale à tous ces triangles.

COROLLAIRE I.

Donc ſi la hauteur d'un cylindre qu'on peut regarder comme un priſme eſt égale au rayon du cercle qui eſt ſa baſe, ſa ſurface ſera double de celle du cercle. 71

COROLLAIRE II.

Ainſi ſi un cylindre a pour ſa hauteur deux fois le rayon, ou une fois le diametre du cercle qui eſt la baſe, ſa ſurface ſera quatre fois plus grande que celle de ce cercle. 72

THEOREME III.

La ſurface du contour d'un cylindre eſt égale à celle d'un cercle, dont le rayon eſt moyen proportionnel entre la hauteur de ce cylindre & le diametre du cercle qui eſt la baſe. Archimede I. Prop. 16. 73

X eſt un cylindre, dont *AB* eſt la hauteur, *BD* le circuit de ſa baſe, qui eſt le cercle *Z*, dont le circuit eſt *FG* ou *BD*, & *BC* le double de

* L. 3. n. 33.

de ce circuit. La ſurface de X eſt égale au parallelogramme ABD ou au triangle ABC, comme celle du cercle Z au triangle EFG *. Je ſuppoſe que HK rayon du cercle Y, eſt moyen proportionnel entre la hauteur de X, & 2 EF diametre de Z.

Soit KL le circuit de Y, ainſi ſa ſurface eſt égale au triangle HKL : il n'eſt donc queſtion que de prouver que le triangle HKL eſt égal au triangle ABC : car dans tous les cercles il y a une même raiſon entre le rayon & la circonference.

Par l'hypotheſe ∺ $AB.\ HK.\ 2\,EF.$ Or $HK.\ KL :: 2\,EF.\ 2\,FG$ ou BC ; & *alternando* $HK.\ 2\,EF :: KL\ \ BC$: donc puiſque $AB.\ HK :: HK.\ 2\,EF :: KL.\ BC$, Ainſi $AB.\ HK :: KL.\ BC$ †, partant $AB \times BC = HK \times KL$ ‡. Or les triangles ABC & HKL ſont les moitiez de ces rectangles ; ils ſont donc égaux ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IV.

74 *La ſurface d'une pyramide eſt égale à un triangle, dont la hauteur eſt égale à la hauteur de chacune de ſes faces, & dont la baſe eſt égale*

* L. 2. n. 154. † L. 3. n. 53. ‡ L. 3. n. 56.

égale au circuit de la base de cette pyramide, ou à un paralelogramme de même hauteur, dont la base est la moitié plus petite. Archimede I. Prop. 10. & 11.

Chacune des faces de la pyramide est un triangle; ces faces étant égales, ces triangles sont égaux entre eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la base est égale à toutes les bases prises ensemble de ces triangles *. Or ce triangle est égal à un parallelogramme de même hauteur, dont la base est moitié plus petite †, qui est ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

Donc puisque les cônes peuvent être considerez comme des pyramides, la surface d'un cône est égale à un triangle rectangle de même hauteur que le côté du cône, & dont la base est égale au circuit de la base du cône, ou à un parallelogramme rectangle de même hauteur, dont la base est égale à la moitié de sa base. 75

La hauteur de la surface du cône & de la pyramide est une ligne droite la plus courte qu'on puisse concevoir, menée sur la surface depuis le sommet jusqu'à sa base.

COROLLAIRE II.

Tout ce qui a donc été démontré des raisons & des proportions entre plusieurs rectangles semblables, convient aux surfaces des cônes. 76

1°. Les surfaces des cônes sont entre elles en raison composée de leur hauteur & de leur base.

2°. Si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, ces surfaces seront en raison doublée.

3°. Si les deux cônes ont leur hauteur ou leur base égale, leurs surfaces seront entre elles comme les inégales.

4. Donc puisque les circonferences des cer-

O cles

* L. 2. n. 143. † L. 2. n. 133.

cles sont entre elles comme leurs diametres, deux cônes ayant même hauteur, leurs surfaces sont entre elles comme les diametres de leurs bases.

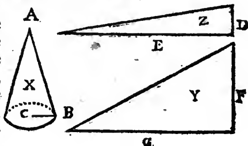
5°. Un rectangle étant donné, on en peut trouver un ou plusieurs semblables qui ayent une telle raison avec lui; aussi un cône étant donné, on peut trouver un ou plusieurs autres cônes aussi semblables, qui soient avec le donné en raison requise.

THEOREME V.

77 *La surface du cône* X *est à celle du cercle* BCD, *qui est sa base, comme* AB *hauteur de sa surface est au rayon de ce cercle.* Archimede I. Prop. 18.

La surface de ce cercle est égale au triangle rectangle *Z* dont le côté *D* est égal au rayon *BC*, & le côté *E* au circuit du cercle *.

La surface du cône *X* est égale au triangle rectangle *Y*, dont le côté *F* est égal à *AB*, & le côté *G* au circuit de sa base †.



G & *E* étant égaux chacun au circuit du cercle, qui est la base du cône, ils sont égaux entre eux; partant les surfaces de ces deux triangles rectangles *Y* & *Z*, qui ont des bases égales, savoir *G* & *E*, sont entre elles comme *F* à *D* ‡; mais *AB* = *F*, & *BC* = *D*: donc *X* surface du cône, est à celle du cercle de sa base comme *AB* hauteur de sa surface est à *BC* rayon du cer-

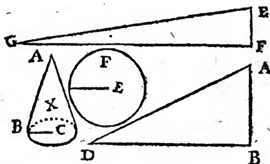
* *L. 2. n. 154.* † *Sup. n. 75.* ‡ *L. 4. n. 75.*

cercle de sa base; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VI.

La surface d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la hauteur du cône, & le rayon de la base de ce cône, est égal à la surface de ce cône. 78
Archimede I. Prop. 17.

Soit *X* un cône dont *AB* est la hauteur de sa surface, & *BD* le circuit qui est sa base; ainsi sa surface est égale au triangle rectangle *ABD*. La ligne *BC* est le rayon de sa base. Je suppose que *EF* est moyen proportionnel entre *AB* & *BC*, & que *EF* est le rayon d'un cercle dont *FG* est le circuit; ainsi la surface de ce cercle est égale au triangle *EFG*: par conséquent il n'est question que de prouver que $ABD = EFG$.



Par l'hypothese $AB . EF :: EF . BC$: & puisque les circonferences des cercles sont entre elles comme leurs diametres, $EF . BC :: FG . BD$. Ainsi $AB . EF :: EF . BC :: FG . BD$. Donc $AB . EF :: FG . BD$; partant $AB \times BD = EF \times FG$ *. Or *ABD* est moitié de $AB \times BD$ †, comme aussi *EFG* est moitié de $EF \times FG$. Ces triangles sont donc égaux; ce qu'il falloit prouver.

 THEO-

* L. 3. n. 56. † L. 2. n. 133.

THEOREME VII.

79 *Si la hauteur & la base d'une prisme sont égales à la hauteur & la base d'une pyramide droite, la surface du prisme sera double de celle de la pyramide.*

Chaque face du prisme est un parallelogramme, & chaque face de la pyramide est un triangle. Dans le cas proposé ces parallelogrammes & ces triangles sont de même hauteur, & sur même base : donc * ces parallelogrammes sont doubles de ces triangles ; ainsi la surface du prisme est double de celle de la pyramide ; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

80 *Donc les cônes pouvant être considerez comme des pyramides, & les cylindres comme des prismes, on peut dire que la surface du cylindre est double de celle du cône de même hauteur & sur même base.*

Remarquez qu'il ne faut pas confondre la hauteur absolue de la pyramide, avec celle des surfaces planes qui la forment : la premiere est une ligne menée perpendiculairement de la pointe de la pyramide sur le plan qui lui sert de base ; & la deuxieme une autre ligne menée aussi perpendiculairement de la pointe, mais sur un côté du polygone qui lui sert de base, laquelle ligne est plus longue que la premiere. Il en est de même des cônes, dont les hauteurs ou axes sont differentes de celles des côtez.

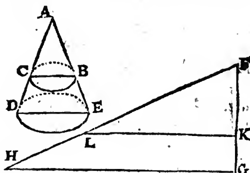
LEMME I.

81 *La surface de* BCDE, *fragment du cône* ADE, *est égale à celle du trapeze* GHLK.

La surface du cône *AED* est égale au triangle

* L. 2. n. 133.

gle rectangle FGH dont $FG = AD$, & GH égale à la circonference du cercle DE *, & celle du cône ABC au triangle rectangle FKL

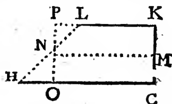


dont $FK = AB$ & KL à la circonference du cercle CB : ôtant donc FKL de FGH, le reste $GHLK$ sera égal au fragment $ECDE$, ce qui est évident.

LEMME II.

HC & KL *sont les rayons des cercles des deux bases d'un fragment de cône.* KC *est coupé en* M *par la moitié*, & MN *est parallele à* KL & HC : *je dis que la surface de ce fragment est égale au rectangle fait de* KC *hauteur de cette surface*, & *de la circonference d'un cercle, dont* MN *est le rayon.* 82

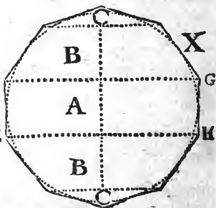
Car la figure $CKLH = OCKP$, à cause de l'égalité des deux triangles HON & NPL, ajoutez ou retranchez ; mais la figure $CKLH$ est à celle qui vient d'être prouvée égale au fragment du cône, en raison du rayon du cercle à sa cir-



* *sup. n. 74.*

conference *. Et $OCKP$ est aussi en même raison au rectangle fait de KC par la circonference du cercle dont MN est rayon; partant ce rectangle est égal au fragment †, ce qu'il falloit démontrer.

LEMME III.



83 *Si l'on joint les angles d'un spheroïde comme* X, *par des plans perpendiculaires à son axe qui le divisent en plusieurs parties,* E *ces parties seront ou des cônes comme* C, *ou des fragmens de cône comme* B, *ou cylindres comme* A.

Cela est évident.

THEOREME VIII.

84 ***Chaque surface des portions d'un spheroïde est égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou sphere inscrite dans ce spheroïde.***

Pour la partie A.

Quant à la partie A, il n'y a pas de difficulté, puisque c'est un cylindre dont la surface ‡ est égale au rectangle de EF par la circonference d'un cercle dont le diamettre est EH, lequel est égal au diametre du cercle ou sphere inscrite dans le spheroïde X; ce qu'il falloit prouver.

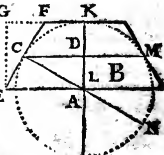
Pour

* *L.* 4. *n.* 75. † *L.* 3. *n.* 52. ‡ *Sup. n.* 68.

Pour la partie B.

Il faut démontrer que la surface de la partie *B*, qui est un fragment de cône, est égale à un rectangle fait de *K* partie de l'axe du spheroïde à laquelle elle répond, & de la circonference d'un cercle inscrit audit spheroïde, dont *CN* est le diametre. (*Figure suivante*)

Je partage cette hauteur *KL* par la moitié, menant *CM* parallele à *FK* & à *EL* : je mene aussi *GE* parallele à *KL* à laquelle elle est égale. Les triangles *EFG* & *ACD* sont rectangles; ainsi *GFE* & *GEF* valent un droit, l'angle *GFE* étant donc égal *FCD* [a], retranchant de l'angle droit *FCA*, l'angle *FCD*, le reste *DCA* sera égal à *GEF*, ainsi les deux triangles *ACD* & *EFG* sont équiangles : donc *GE* ou *KL*. *EF* : : *CD*. *CA* [b], partant *KL* est à *EF* comme le double



de *CD*, qui est *GM*, est au double de *AC* qui est *CN*. Soit *CM* diametre d'un cercle dont *Y* est la circonference; & *CN* celui d'un cercle dont *Z* est la circonference. Donc *CM*. *CN* : : *Y*. *Z*. Donc *KL*. *EF* : : *Y*. *Z*. Donc *KL* $\times$ *Z* = *EF* $\times$ *Y* [c]. Or la surface de *B*, fragment de cône, est égale à *EF* $\times$ *Y* [d]. Donc cette surface égale à *EF* $\times$ *Y*, est égale à un rectangle fait de *KL* par *Z* circonference d'un cercle dont *CN* est le diametre; ce qu'il falloit prouver.

Pour la partie C.

De *O* moitié de *BD* côté du cône *C*, je mene

O 4 à

a. L. 2. n. 25. b L. 4. n. 10. c L. 3. n. 56. d Sup. n. 32.

à A, centre du cercle qui est inscrit dans le spheroïde, la ligne AO, & par D une parallele à AO ; ainsi comme BG est moitié de BD, AO sera moitié de DF ; partant DF sera le diametre du cercle dont AO est le rayon. La surface du cône C est égale à un triangle rectangle dont BD est la hauteur, & la base est un cercle dont DG est le diametre [a], ou à un parallelogramme rectangle de même hauteur BD, & dont la base est la moitié de celle d'un cercle dont DG est le diametre [b], ou ce qui est la même chose, dont la base est égale à un cercle dont DE est le diametre. Soit nommé Y la circonference de ce cercle, & Z celle du cercle dont DF est le diametre : il faut prouver que $BD \times Y = BE \times Z$.

Les deux triangles DEF & DEB sont semblables [c] : Donc $BD. BE :: DF : DE$. Or $DF. DE :: Z. Y$ [d] : donc $BD. BE :: Z. Y$ [e] : donc $BD \times Y = BE \times Z$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME IX.

85 *La surface d'un spheroïde est égale au rectangle fait de son axe, par la circonference du cercle de la sphere qui lui est inscrite.*

Par le Theorême précédent, puisque la surface de chaque partie du spheroïde est égale au rectangle, faite de chaque partie de son axe à laquelle elle répond, & de la circonference du

a *sup. n.* 75. b *L.* 2. *n.* 131. c *L.* 4. *n.* 27. d *L.* 4. *n.* 42. e *L.* 3. *n.* 56.

du cercle de la ſphere qui lui eſt inſcrite, toute la ſurface entiere ſera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du cercle de la ſphere qui lui eſt inſcrite, puiſque le tout & ſes parties font un produit égal quand ils ſont multipliez par une même grandeur *.

THEOREME X.

La ſurface d'une ſphere eſt égale au rectangle de ſon axe, & de la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette ſphere. 86

La ſphere peut être conſiderée comme un ſpheroïde formé par un polygone régulier d'une infinité de côtez †, dont le diametre par conſéquent peut être pris pour l'axe de la ſphere. Ainſi ſa ſurface, par le Théorême précédent, eſt égale au rectangle fait de ſon axe par la circonference du cercle ou polygone, par la révolution duquel elle a été formée, dont le diametre par conſéquent eſt le même que celui de cette ſphere; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XI.

La ſurface d'une ſphere eſt égale à celle du contour d'un cylindre où elle eſt inſcrite, qui par conſéquent à la même hauteur ou même axe. 87

La ſurface de la ſphere *AMNC* (*fig. ſuiv.*) eſt égale à un rectangle fait de ſon axe, & de la circonference du cercle qui a un même diametre *MN* ‡. Or la ſurface du cylindre où cette ſphere eſt inſcrite, dont les côtez *DP* & *EO* ſont égaux à *AC* l'axe de cette ſphere, eſt égale à ce même rectangle; car elle eſt égale au rectangle fait de *PD* par la circonference du cer-

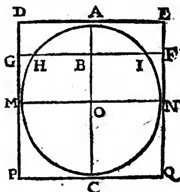
* L. 3. n. 17. † ſup. n. 66. ‡ ſup. n. 86.

cercle de sa base qui a pour diametre *PQ* égal à *MN*; puisque le diametre d'une sphere inscrite dans un cylindre doit être égal à celui de la base du cylindre, selon l'idée que l'on a donnée des figures inscrites [a].

THEOREME XII.

88 *Si on coupe une sphere inscrite dans un cylindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la sphere est égale à celle de la partie du cylindre qui lui répond.*

AC axe de la sphere est la hauteur du cylindre où la sphere est inscrite, ainsi ce cylindre touche par ses deux bases cette sphere. Je coupe l'axe *AC* par des plans perpendiculaires sur lui, qui coupent aussi le cylindre. Je dis que la surface de la partie *MHIN* est égale à celle de la partie *MGFN* du cylindre, comme aussi la surface de *HAI* à celle de *EFGD*.



Car on peut prendre cette sphere pour un spheroïde [b], ainsi la partie *MHIN* & *HAI* pour des portions des spheroïdes. Ainsi la surface de *MHIN* est égale au rectangle *BO* par la circonference d'un cercle dont *MN* est le diametre [c], lequel rectangle est égal à la surface *FGMN* [d]; de même la surface de *HAI* est égale au rectangle de *AB* par la circonference d'un cercle dont *GF* est le diametre [e], auquel la surface de la partie *DEFG* est égale [f].

PRO-

a *sup. n.* 46. b *sup. n.* 66. c *sup. n.* 84. d *sup. n.* 68.
e *sup. n.* 84. f *sup. n.* 68.

PROBLEME I.

Couper une sphere par un plan, de sorte que les surfaces des portions de cette section soient en raison donnée. Archimede II. Prop. 4. & 5. 89

Il faut inscrire la sphere dans un cylindre, ensuite couper les côtez du cylindre selon la raison donnée, & mener par les points de cette section des lignes ou des plans paralleles qui couperont la sphere selon la raison donnée; car les surfaces des portions de la sphere comprises entre ces paralleles, seront égales à celles des portions du cylindre auxquelles elles répondront, comme on vient de le prouver.

THEOREME XIII.

La surface d'une sphere est égale à quatre fois celle de son plus grand cercle. Archimede I. Prop. 37. 90

Concevons une sphere dans un cylindre, dont la base par conséquent sera égale au plus grand cercle de la sphere, & sa hauteur sera le diametre de ce plus grand cercle; par conséquent le contour de ce cylindre sera égal à quatre fois la surface de ce cercle *. Or la surface de la sphere est égale à ce contour †: donc elle est égale à quatre fois son plus grand cercle.

THEOREME XIV.

La surface d'une sphere est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est égal au diametre de son plus grand cercle. 91

Soit X une sphere & Z un cercle; dont le rayon est égal au diametre du plus grand cercle de la sphere X. Il faut prouver que la surface de X est égale à celle de ce cercle Z.

O 6 Ayant

* sup. nº 72. † sup. nº 87.

Ayant supposé que le diametre du plus grand cercle est 1 ; donc selon l'hypothese, le diametre de *Z* est 2. Or les surfaces des cercles étant entre elles comme les quarrez de leurs diametres*, puisque le quarré de 1 est 1, & que celui de 2 est 4, selon l'hypothese, la surface de *Z* sera quadruple de celle du cercle de la sphere *X*. Or la surface de cette sphere est quadruple de celle de son plus grand cercle par le Théorême précédent, donc elle sera égale à celle de *Z*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XV.

92 *La surface entiere d'un cylindre*, c'est-à-dire, *tant de son contour que de ses deux bases, est à celle d'une sphere à laquelle il est circonscrit, en raison sesquialtere.* Archimede I. Prop. 39.

1°. Le seul contour du cylindre est égal à la surface de la sphere †.

2°. Chaque base de ce cylindre est le plus grand cercle de la sphere, qui est la quatrieme partie de sa surface ‡ ; ainsi les deux bases du cylindre sont la moitié de la surface de la sphere.

Partant toute la surface du cylindre est égale, 1°. à une fois toute la surface de la sphere: 2°. à la moitié de cette surface ; ainsi cette raison est sesquialtere, c'est-à-dire, comme 3 à 2.

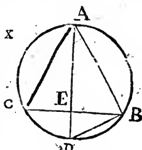
THEOREME XVI.

93 *Une sphere étant coupée par un plan en deux portions, les surfaces de ces portions sont entre elles comme celles des cercles qui ont pour rayons les cordes de la moitié de ces portions, & sont égales à ces cercles.*

Soit *X* une sphere coupée par le plan *BC* ; il faut prouver que les surfaces de ces deux portions

* *L. 4. n. 93.* † *Sup. n. 87.* ‡ *Sup. n. 90.*

tions sont entre elles comme celles des surfaces des cercles, dont *AB* & *BD* cordes de la moitié de ces deux portions sont les rayons, & qu'elles leur sont égales.



1°. Ayant inscrit la sphere *X* dans un cylindre de même hauteur que cette sphere, la surface de la portion *ABC* sera égale au contour de la partie du cylindre qui lui répond, comme celle de *BCD* à l'autre partie du cylindre [a]. Les contours de ces deux parties sont entre eux comme *AE* à *ED* [b]. Or les quarrez sur *AB* & *BD* sont aussi comme *AE* à *ED* [c]: Donc les surfaces des portions de cette sphere seront entre elles comme ces deux quarrez, ou les cercles dont ils sont rayons [d].

2°. Le quarré de *AD* est égal aux quarrez de *AB* & de *BD* [e]; donc la surface du cercle dont *AD* est le rayon, est égale aux surfaces des deux cercles, dont *AB* & *BD* sont les rayons [f].

Or le cercle dont *AD* est le rayon, a sa surface égale à celle de la sphere *X* [g]; ainsi cette surface est égale à celle des deux cercles dont *AB* & *BD* sont les rayons. Mais il vient d'être dit qu'ils sont aussi entre eux comme ces portions; donc ils leur seront égaux chacun à celui qui lui répond, puisque le même tout est divisé en même proportion

THEOREME XVII.

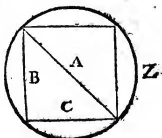
La surface d'une sphere est double de celle du 94

O 7 *con-*

a *sup. n.* 88 b *sup. n.* 69. c *L.* 4. *n.* 80. d *L.* 4. *n.* 93.
e *L.* 4. *n.* 78. f *L.* 4. *n.* 93. g *sup. n.* 91.

contour du cylindre qui lui est inscrit, & dont la hauteur est égale au diametre de sa base.

La surface de la sphere *Z* est quadruple de celle du cercle, dont *A* est le diametre *.



La surface du cercle dont *A* est le diametre, est égale à la surface des cercles dont *C* & *B* sont les diametres, puisque ces surfaces sont comme les quarrez de leurs diametres, & que $AA = CC + BB$ †. Or $C = B$: ainsi la surface du cercle dont *A* est le diametre, est égale à deux fois celle du cercle dont *C* est le diametre; & par conséquent puisque la surface de *A* est la quatrieme partie de la surface de la sphere *Z*, celle du cercle dont *C* est le diametre est la huitieme partie de celle de la sphere *Z*. Or la surface de ce même cercle, dont *C* est le diametre, est la quatrieme partie du contour de ce cylindre inscrit ‡: donc ce contour est la moitié de la surface de la sphere *Z*.

SECTION IV.

De la solidité des Solides.

Propositions évidentes touchant cette solidité.

PROPOSITION I.

95 *ON peut concevoir que tout Parallelépipede est fait par le mouvement de son plan, ou de sa base toujours parallelement à elle-même.*

PRO-

*sup. n. 70. † L. 4. n. 78. ‡ Sup. n. 72.

PROPOSITION II.

Si le plan dont le mouvement forme le Parallelépipede, se fait selon la perpendiculaire de sa hauteur, il est droit & ses angles sont droits. Si c'est selon une ligne oblique, il est oblique, & ses angles ne sont pas droits. 96

PROPOSITION III.

On peut aussi concevoir qu'un Parallelépipede est composé d'une infinité de plans tous paralleles, & tous égaux à celui qui en est la base. 97

COROLLAIRE.

Il en est de même des cylindres, & des prismes. 98

PROPOSITION IV.

Une pyramide peut être faite par le mouvement de sa base, toujours parallelement à elle-même, & décroissant à proportion qu'elle monte. Si ce mouvement se fait selon la perpendiculaire de sa hauteur, la pyramide est droite; si selon une oblique, elle est oblique. 99

PROPOSITION V.

On peut aussi concevoir qu'une pyramide est composée d'une infinité de plans paralleles, qui diminuent à proportion qu'ils sont élevez. 100

PROPOSITION VI.

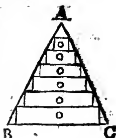
Deux solides de même hauteur contiennent un égal nombre de plans, c'est-à-dire, qu'on en peut concevoir autant dans l'un que dans l'autre. 101

PROPOSITION VII.

Si on suppose qu'un parallelépipede oblique, ou prisme oblique, toute pyramide, tout cône, sont composez d'une infinité de plans, leurs surfaces seront unies. 102

Con-

Considerez la pyramide *BAC*. Si les plans *O*, *O*, *O*, *O*, *O*, *O*, qui la composent sont épais, il est évident que sa surface ne sera pas unie, mais par degrez d'autant plus grands, que les plans *O* seront plus épais; & ils le seront d'autant moins, qu'il y



en aura plus. Si on supposoit donc qu'ils fussent infinis en nombre, ils n'auroient plus d'épaisseur; & alors la surface de *BAC* seroit sans degrez. Ce qui se conçoit de tout parallelépipede, de tout prisme, de toute pyramide & de tout cône.

PROPOSITION VIII.

103 *On peut concevoir un parallelépipede sur une ligne donnée qui soit semblable, & posé de la même maniere qu'un autre parallelépipede donné.* Eucl. XI. Prop. 27.

Euclide propose de faire la chose; ce qui n'est pas difficile : mais il suffit qu'on la conçoive faite.

PROPOSITION IX.

104 *Deux solides sont égaux, qui sont composez d'un égal nombre de plans également épais, semblables & égaux.*

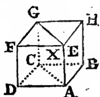
Si par exemple deux solides *X* & *Z* étoient composez chacun d'un million de plans également épais & égaux, ils seroient évidemment égaux. J'ajoute *semblables*, pour marquer qu'en cas que les plans dont *X* est composé allassent en diminuant, si ceux de *Z* alloient de même en diminuant chacun étant semblable à celui auquel il répond, c'est-à-dire, le centieme de *X* étant égal

égal & semblable au centieme de *Z*, il faut que *X* & *Z* soient nécessairement égaux.

PROPOSITION X.

Si on coupe le parallelépipede X *par un plan, selon la diagonale* AC *ou* EG, *il sera coupé en deux prismes triangulaires égaux.* Eucl. XI. Prop. 28. 105

Les deux parties de *X* ont leurs bases égales, elles ont même hauteur : donc par la Proposition précédente, elles sont égales. Selon la Définition des prismes *, elles sont prismes triangulaires.



PROPOSITION XI.

Si les côtez des plans opposez d'un parallelépipede sont coupez en deux également, & qu'on mene des plans par les sections ; la ligne de commune section & de ces plans, & le diametre du parallelépipede, se couperont en deux également. Eucl. XI. Prop. 39. 106

Cela est évident, car ce diametre est la base d'un triangle coupé parallelement à un de ces côtez par le milieu de l'autre ; ce qui divise également & le côté & la base.

PROPOSITION XII.

Si un solide est compris entre des plans paralleles, ceux de ces plans qui sont opposez sont des parallelogrammes semblables & égaux. Eucl. XI. Prop. 24. (*Même figure.*) 107

1°. Les lignes *AD* & *BC* seront paralleles †, comme aussi *AB* & *DC*. Il en est de même des lignes *EF* & *HG*, & de *FG* & *EH*. Ainsi les plans *ABCD* & *EFGH* sont des parallelogrammes. 2°. Ces parallelogrammes sont semblables ; car l'angle *EFG* est égal à *ADC* ‡ : ainsi des

* *Sup. n.* 34. † *Sup. n.* 34. ‡ *Sup. n.* 36.

des autres. 3°. *AB* & *HE* paralleles entre les paralleles *AE* & *BH* sont égales, obliques ou perpendiculaires quelles qu'elles soient * : ainsi on peut démontrer que ces plans opposez sont égaux.

THEOREME I.

108 *Toute section d'un parallelépipede, d'un prisme, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, qui se fait parallelement à sa base, est semblable à sa base.* Eucl. XI. Prop. 25.

1°. Cela est évident dans le parallelépipede, le prisme, & le cylindre, qui se font par le mouvement toujours parallele de leurs bases.

2°. Aussi dans la pyramide, dans le cône, qui sont des solides faits par le mouvement de leur base, qui diminue proportionnellement; ainsi tous les plans paralleles dont on peut concevoir que l'un & l'autre est fait, sont tous semblables. Or ces sections sont quelqu'un de ces plans; par conséquent elles sont semblables à la base; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

109 *Tous les solides de même nom, qui ont des bases égales & sont de même hauteur, sont égaux, soit droits, soit obliques.* Eucl. XI. Prop. 29. 30. & 31.

C'est-à-dire, que les solides parallelépipedes étant sur bases égales, & de même hauteur, sont égaux entre eux, ils ont un égal nombre de plans tous semblables & égaux à leurs bases †; ainsi ils doivent être égaux.

Il en est de même des prismes, des cylindres, des pyramides, des cônes; car chaque plan de l'une est semblable & égal à chacun de l'autre pris à la même hauteur.

Co-

* *L. 2. n. 110.* † *Sup. n. 101.*

C O R O L L A I R E.

Donc pour mesurer les solides, il faut seulement avoir égard à l ur hauteur, & à leur base. 110

Car un parallelépipede oblique a bien plus de surface qu'un droit. Cependant s'il est sur une base égale, & de même hauteur, il n'est pas plus grand.

T H E O R E M E III.

Les solides parallelépipedes & les prismes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XI. Prop. 32. 111

Soient les deux solides Z & X. 1°. Ils ont un égal nombre de plans paralleles *, & semblables à leurs bases. Si leurs bases sont égales, ils sont donc égaux; si celle de Z est double de celle de X, alors tous les plans de Z étant doubles de ceux de X, il faut que Z soit double de X. 2°. Si ces deux solides ont leurs bases égales, ils seront comme leurs hauteurs; car tous leurs plans étant égaux, si le solide Z est deux fois plus haut que X, il doit avoir deux fois plus de ces plans. S'il est trois fois plus haut, il en aura trois fois plus.

T H E O R E M E IV.

Deux cylindres de même hauteur sont comme leurs bases; ou s'ils ont une même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XII. Prop. 11. & 14. 112

Cela vient d'être démontré du prisme, & par conséquent du cylindre.

T H E O R E M E V.

Si un cylindre est coupé par un plan parallele aux plans opposez de ses bases, les segmens du cylin- 113

* *sup. n.* 101.

cylindre feront l'un à l'autre comme les fegmens de l'axe. Eucl. XII. Prop. 13.

Les plans de ces fections feront égaux [a]. Tous les fegmens feront donc comme autant de cylindres qui ont leurs bafes égales, & partant il font entre eux comme des fegmens de l'axe, qui font leur hauteur par le précédent Théorême.

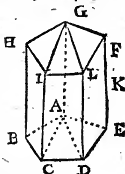
THEOREME VI.

114 *Un parallelépipede eft double d'un prifme triangulaire de même hauteur, fi la bafe du parallelépipede eft double du triangulaire.* Eucl. XI. Prop. 40.

Cela eft évident, puifque ces deux prifmes font comme leurs bafes [b].

THEOREME VII.

115 *Tout prifme polygone peut être divifé en prifmes triangulaires.*



Soit *K* un prifme polygone dont les bafes font *ABCDE* & *GHILF*: ces bafes polygones fe réduifent en triangles. Par la Définition des prifmes triangulaires, les folides *ABCGHI*, *ACDGIL*, *ADEGLE* font des prifmes triangulaires: donc le prifme *K* peut être divifé en prifmes triangulaires.

THEOREME VIII.

116 *Un prifme eft égal à plufieurs prifmes de même hauteur, fi fa bafe eft égale à celles de tous ces prifmes. Il en eft de même des pyramides.*

Car concevant dans ces folides des plans paralleles à la bafe [c], il y aura un égal nombre de plans dans chacun [d]; chaque plan dans le grand prif-

a *fup n.* 98. b *fup. n.* 111. c *fup. n.* 97. d *fup. n.* 101.

prisme sera égal à tous les plans qui seront dans les autres prismes ; car il leur sera comme sa base est à toutes les bases de ces prismes. Or elle leur est égale : donc, &c. Il en est de même des pyramides.

COROLLAIRE I.

Un cylindre est égal à un prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à la sienne. 117

Un cylindre est un prisme polygone. Tout prisme polygone peut être divisé en prismes triangulaires *. Ces prismes seront égaux à un seul prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à toutes celles de ces prismes †. Partant le cylindre égal à ce prisme polygone, l'est à ce prisme triangulaire qui a même hauteur, & dont la base est égale à la sienne.

COROLLAIRE II.

Donc un cylindre X *est égal à plusieurs cylindres* A, B, C, &c. *de même hauteur, dont toutes les bases prises ensemble sont égales à la sienne.* 118

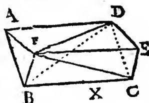
Car tous ces cylindres seront égaux à autant de prismes triangulaires, qui ont même hauteur & bases égales. Celui auquel A est égal, & partant de même hauteur & sur base égale, est égal à tous ces autres prismes triangulaires, & partant aux cylindres *A*, *B*, *C*, *&c.* dont toutes les bases sont égales à celle de *X* ; partant *X* est égal à *A*, *B*, *C*, *&c.*

THEOREME IX.

Un prisme triangulaire se divise en trois pyramides triangulaires égales. Euclide XII. Prop. 7. 119

Soit

* *sup. n.* 115. † *sup. n.* 116.



Soit *X* un prisme triangulaire; je mene sur chacune de ses trois faces des diagonales, qui feront six triangles. Les triangles *BAD*, *BCD* sont égaux [a], les pyramides *BADF* & *BDCF* qui ont même sommet, & partant même hauteur, sont égales [b]. Ayant ôté, par la pensée, de ce prisme *X*, ces deux pyramides, il en reste une troisieme savoir *FCED*, laquelle a premierement même sommet *D*, & partant même hauteur que la pyramide *FBCD*; elles ont des bases égales, savoir les triangles égaux *FBC* & *FCE* [c]: donc elles sont égales [d]. Or la pyramide *FBCD* est la même que *BDCF*, étant formée par les mêmes triangles: donc les pyramides *FCED* & *BADF* seront égales, l'étant à une troisieme; ainsi le prisme *X* peut être divisé en trois pyramides égales, qui sont *BADF*, *BDCF* & *CEDF*.

Corollaire I.

120 *Donc toute pyramide est le tiers de tout prisme de même hauteur, qui est sur même base, ou sur base égale.*

Corollaire II.

121 *Donc pour mesurer une pyramide, il faut multiplier la base par le tiers de sa hauteur.*

Lemme.

122 *Une pyramide polygone se peut diviser en pyramides triangulaires.*

La base d'une pyramide polygone est un polygone, qui par conséquent se réduit en triangles,

a *L.2.n.128.* b *sup. n.109.* c *L.2.n.128.* d *sup. n.109.*

gles, sur lesquels concevant des plans élevez le long des côtez de cette pyramide jusqu'à son sommet, on aura plusieurs pyramides triangulaires, qui seront les parties de la pyramide polygone.

THEOREME X.

Les pyramides qui ont pour base des triangles, & qui sont de même hauteur, sont entre elles comme leurs bases. Il en est de même de celles qui ont des polygones pour leurs bases. Eucl. XII. Prop. 5. & 6. 123

Les prismes sont triples des pyramides de même base & de même hauteur *. Mais les prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, ou ceux de même base sont comme leurs hauteurs †: donc aussi les pyramides, qui ne sont que le tiers. Par le Lemme précédent, on peut confondre les pyramides polygones avec les triangulaires, puisqu'elles s'y resolvent.

THEOREME XI.

Toute pyramide ayant une base triangulaire peut être divisée en deux pyramides égales, semblables entre elles, & à la totale, & en deux prismes égaux & plus grands que la moitié de la pyramide totale. Eucl. XII. Prop. 3. 124

THEOREME XII.

Deux pyramides de même hauteur ayant des bases triangulaires, soient divisées en deux autres pyramides égales entre elles & semblables à la toute & en deux prismes égaux; & que les pyramides provenues de cette division soient toujours divisées de la même façon: comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre; ainsi tous les prismes qui sont en l'une des pyrami- 125

* *Sup. n. 120.* † *Sup. n. 111.*

mides, seront à tous les prismes de l'autre égaux en nombre. Eucl. XII. Prop. 4.

Ces deux Propositions n'ont rien de fort utile, ainsi je n'en rapporte point les démonstrations.

THEOREME XIII.

126 *Toute pyramide polygone est le tiers de tout prisme de même hauteur, & qui est sur même base ou sur base égale.*

Car ayant réduit en triangles l'une & l'autre base de ces deux solides, la pyramide polygone sera divisée en pyramides triangulaires. Or chacune de ces pyramides triangulaires, sera le tiers de chacun de ces prismes triangulaires *: ainsi toute la pyramide polygone sera le tiers de tout le prisme polygone.

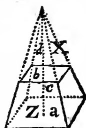
AVERTISSEMENT.

127 *On donne cette règle pour trouver la solidité de* Z *un fragment de pyramide dont les bases sont paralleles ; soit par exemple l'inferieure* 36, *la superieure* 9, *ce nombre* 18 *est moyen entre ces deux nombres.*

Il les faut ajouter dans une somme, & multiplier cette somme par 2 que je suppose le tiers de la hauteur du fragment, le produit 126 sera la solidité de ce fragment. Examinons cette règle.

Soit a *la base inferieure*, b *la superieure*, c *la hauteur de* Z *fragment*, d *le reste de l'axe pour achever la pyramide*, aac + aad *est la solidité d'un prisme qui est le triple de toute la pyramide, dont j'ôte* bbd *la solidité d'un prisme, dont la pyramide* X *est le tiers : Ainsi* $aac + aad - bbd = 3Z$. *Puisque* ∺ aa. ab. bb;

* *Sup. n. 120.*



bb; *Donc, selon la règle, en multipliant ces trois termes qui sont les mêmes que* 36, 18, 9, *par le tiers de* c, *j'aurai la solidité de* Z; *ainsi multipliant par tout* c, *j'aurai* $aac + abc + bbc = 3Z$: *reste à démontrer que* $aac + aad - bbd = aac + abc + bbc$: *j'ôte* aac *de part & d'autre, reste* $aad - bbd = abc + bbc$. *Il faut voir si cela est.*

$a - b. b :: c. d$, *multipliant* $a - b$ *&* b *par* $a + b$ [a], $aa - bb. ab + bb :: a - b. b$. *Ainsi* $aa - bb. ab + bb :: c. d$ [b]: *Donc multipliant les extrêmes & les moyens, on a* $aad - bbd = abc + bbc$ [c]; *ce qui restoit à prouver. La règle est donc sure.*

THEOREME XIV.

Un cône est le tiers d'un cylindre de même hauteur sur bases égales. Eucl. XII. Prop. 10. 121

Un cône est une pyramide d'une infinité de côtez : or une pyramide est le tiers d'un prisme de même hauteur, qui a une base égale [d]: donc le cône est aussi le tiers d'un cylindre de même hauteur, & sur même base ou base égale, puisqu'un cylindre est un prisme d'un nombre infini de côtez.

COROLLAIRE I.

Un cône est égal à tous les cônes de même hauteur, dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne. 122

Ces cônes sont des pyramides d'un nombre infini de côtez, lesquels sont le tiers du cylindre ou du prisme; ainsi cette Proposition n'est pas differente de celle qu'on a proposée [e].

 Co-

a *L.* 3. *n.* 54. b *L.* 3. *n.* 53. c *L.* 3. *n.* 56.
d *Sup. n.* 120. e *Sup. n.* 116.

COROLLAIRE II.

330 *Deux cônes de même hauteur sont comme leurs bases; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs.* Eucl. XII. Prop. 11. & 14.

Cela est évident.

THEOREME XV.

331 *Les prismes & les parallelépipedes semblables sont en raison composées des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée.* Eucl. XI. Prop. 33.

Leur solidité dépend de la multiplication de leurs dimensions [a]. La raison qu'ils ont entre eux est composée de celle de leurs trois dimensions [b]. Etant semblables, cette raison est triplée [c].

THEOREME XVI.

332 *Les cylindres semblables sont entre eux en raison composée de leurs dimensions, & cette raison est triplée.* Eucl. XII. Prop. 12.

Car ces cylindres étant comme des prismes dont les bases sont d'un nombre infini de côtez, ils seront entre eux comme ces prismes, par le précédent Théorême.

THEOREME XVII.

333 *Les pyramides semblables sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée.* Eucl. XII. Prop. 8.

Cela est évident, car elles sont le tiers des prismes qui sont sur leurs bases, & qui ont même hauteur [d]; & ainsi en même raison.

THEOREME XVIII.

334 *Les cônes semblables sont entre eux en raison com-*

a *sup. n.* 110. b *L.* 3. *n.* 78. c *L.* 3. *n.* 74. d *sup. n.* 320.

composée des raisons de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 12.

C'est une suite; car les cônes sont des pyramides sur des bases d'un nombre infini de côtez.

THEOREME XIX.

Les cylindres semblables sont entre eux comme les cubes des diametres de leurs bases. 135

Ils sont en raison triplée de chacune de celles de leurs trois dimensions, & par conséquent de la raison des diametres de leurs bases. Or les cubes de leurs diametres sont en raison triplée de celle de ces mêmes diametres [a]. Donc puisque les raisons composées d'égales raisons sont égales, les cylindres semblables sont entre eux comme les cubes des diametres de leurs bases. Il en est de même des cônes semblables, & cela se démontre de la même maniere.

THEOREME XX.

Les parallelépipedes égaux ont leurs bases & leurs hauteurs réciproques; & si elles sont réciproques, ces deux solides sont égaux. Eucl. XI. Prop. 34. 136

Soient X & Z deux parallelépipedes égaux, A la hauteur de X, & B celle de Z, M la valeur de la base de X, & N la valeur de la base de Z. Selon qu'on le suppose, $A \times M = B \times N$: Donc $A. B :: N. M$ [b]; partant ces quatre grandeurs A, M, B, N sont réciproques [c]. Or si ces quatre grandeurs sont réciproques, c'est-à-dire, si A, M, B, N peuvent être rangez de sorte que $A. B :: N. M$, il faut que $A \times M = B \times N$ [d].

THEOREME XXI.

Deux cylindres étant égaux, il en est de même des pyramides & cônes, *leurs hauteurs & leurs bases sont réciproques; & si elles sont réci-* 137

 pro-

a L. 3. n. 82. b L. 3. n. 58. c L. 3. n 61. d L. 3. n. 56.

proques, ces deux cylindres sont égaux. Eucl. XII. Prop. 9. & 15.

La démonstration du Théorême précédent sert à celui-ci; il n'y a qu'à entendre par X & par Z deux cylindres.

THEOREME XXII.

338 *Si* A, B, C, *trois lignes droites, sont proportionnelles, le solide parallelépipede* ABC *fait de ces trois lignes, est égal au parallelépipde* BBB *fait de la moyenne* B, *pourvu que ces solides soient équiangles.* Eucl. XI. Prop. 36.

$\div A.B.C.$ Donc $AC = BB$ *. Donc multipliant AC & BB par B, le produit ACB sera encore égal au produit BBB †. Or ACB est le parallelépipede fait des trois lignes A, B, C, égal ainsi à BBB fait de la moyenne B.

THEOREME XXIII.

339 A, B, C, D, *sont quatre lignes proportionnelles. Les solides semblables faits sur ces lignes sont en proportion; & s'ils sont en proportion, ces quatre lignes sont proportionnelles.* Eucl. XI. Prop. 37.

Cela a été prouvé ‡.

THEOREME XXIV.

340 *Une sphere est égale à un cône, ou pyramide polygone, qui a pour axe le rayon de cette sphere, & pour base un cercle, dont le rayon est le diametre de cette même sphere.*

1°. En concevant une infinité de cônes ou de pyramides polygones, dont le sommet est dans le centre d'une sphere, & les bases dans la surface de la même sphere; il est évident qu'on peut dire, que la solidité de cette sphere est égale à tous ces cônes ou pyramides polygones, puis-

* L. 3. n. 37. † L. 3. n. 54. ‡ L. 3. n. 85.

puisque c'est dire que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

2°. Tous ces cônes sont égaux à un cône qui a même hauteur, à savoir le rayon de cette sphere, & pour base toute la surface de cette sphere, qui est égale aux bases de ces cônes *.

3°. Or la surface de cette sphere est égale à celle d'un cercle, qui a pour rayon le diametre de cette sphere †: donc la solidité est égale à celle d'un cône dont la base, &c.

Supposé la raison du diametre à la circonference du cercle comme 7 à 22, on peut dire que la solidité de la sphere est au cube de son diametre comme 11 *à* 21 *: car soit* m *la circonference du cercle, &* n *le diametre.* 1°. mnn. nnn :: m. n ⊥. *Or* m *est à* n *comme* 22 *à* 7, *ou* 66 *à* 21. *Ainsi la sixieme partie de* mnn, *qui est la solidité de la sphere, suivant ce qui se conclud facilement de ce qui a été précédemment démontré, est à* nnn *cube de son diametre, comme la sixieme partie de* 66, *c'est-à-dire,* 11 *est à* 21 ; *ce qu'il falloit prouver.* 141

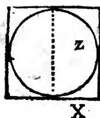
THEOREME XXV.

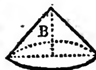
La raison de X *cylindre à la sphere* Z *qui lui est inscrite, est sesquialtere.* 142

Soient *B* & *C* deux cônes qui ayent pour axe le rayon de la sphere *Z*, & que le rayon de la base de *B* soit celui de la sphere *Z*, & le rayon de la base de *C* soit l'axe ou le diametre de la même sphere *X*, alors ces deux cônes *B* & *C* seront comme leurs bases ‡. Or celle de *C* est quadruple de celle de *B* : donc le cône *C* est quadruple du cône *B* ; ainsi *B*. *C* : : 1. 4. le plus petit cône *B* est la sixieme partie du cylin-

 dre

* *Sup. n.* 129. † *Sup. n.* 91. ⊥ *L.* 3. *n.* 54. ‡ *Sup. n.* 130.







dre *X*, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere *Z*, & pour axe le diametre; car ce cône *B* eſt le tiers d'un cylindre, qui a même baſe que lui & même axe *; par conſéquent il eſt la ſixieme partie d'un cylindre qui a même baſe, & un axe deux fois plus grand; ainſi *X. B* : : 6. 1. Le cône *C* eſt égal à la ſphere *Z* †, on a prouvé que *B. C* : : 1. 4; ainſi *B. Z* : : 1. 4: donc puiſque le cylindre *X* vaut ſix parties, telles que la ſphere *Z* en vaut quatre, *X. Z* : : 6. 4; ce qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

THEOREME XXVI.

243 *Les ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs diametres, ou en raiſon triplée de celle de leurs diametres.* Eucl. XII. Prop. 18.

Les ſpheres ſont en raiſon compoſée des raiſons de leurs trois dimenſions; toutes les ſpheres ſont ſemblables; ainſi leurs trois dimenſions ont même raiſon: Donc la raiſon qu'elles compoſent eſt triplée de chacune des raiſons de leurs dimenſions; par exemple, de celle de leurs diametres. Or les cubes de ces diametres ſont en raiſon triplée de celle de ces diametres: donc les ſpheres ſont entre elles comme les cubes de leurs diametres.

SEC-

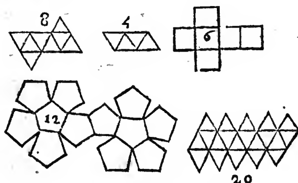
* *ſup. n.* 128. † *ſup. n.* 140.

SECTION V.

De la maniere d'inſcrire ou circonſcrire à une Sphere les cinq Corps réguliers.

AVERTISSEMENT.

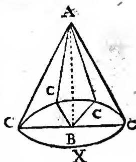
IL faut faire avec du carton les cinq corps ré- guliers, la ſeule vue de la figure ſuivante en apprend le moyen. Après avoir tracé ces figures & coupé le carton, on le plie de maniere que les plans qui compoſent ces corps réguliers ſe joignent enſemble. 141



THEOREME I.

Toute ſection d'une ſphere par un plan, eſt un cercle. 142

X eſt la ſection d'une ſphere dont *A* eſt le centre; il faut prouver que cette ſection eſt un cercle: pour cela concevons 1°. que du centre *A* de la ſphere on fait tomber ſur le plan de cette ſection, que je nomme *X*, une perpendi-



diculaire *AB*. 2°. Que l'on tire du même centre *A* des lignes telles que *AC*, à tous les points des extrémitez de *X*: toutes ces lignes qui sont rayons de la sphere, sont égales. Elles sont obliques, puisqu'on ne peut mener de *A* plus d'une perpendiculaire sur *X*. Or les obliques égales ont leur pié également éloigné de la perpendiculaire *. Donc toutes ces lignes menées des extrémitez de *X* au point *B* sont égales, & par conséquent ces extrémitez sont dans la circonference d'un cercle; ainsi *X* est un cercle, suivant sa définition †.

PROBLEME I.

146 *Deux cercles inégaux étant concentriques, inscrire au plus grand un polygone régulier ayant un nombre pair de côtez, de sorte que ce polygone ne touche point le plus petit.* Euclid. XII. Prop. 16.

PROBLEME II.

147 *Deux spheres inégales ayant un même centre, inscrire en la plus grande un* polyedre, *duquel les plans ne touchent point la surface de la petite sphere.* Eucl. XII. Prop. 17.

Ces deux Problêmes ne me paroissent point nécessaires, ainsi je les passe.

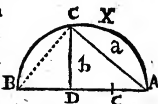
LEMME PREMIER.

148 *Si* aa *quarré de* AC *est triple de* bb *quarré de* CD *moyen proportionnel entre* AD *&* BD, *je dis que* DB *est la troisieme partie du diametre* AB.

Soit

* L. 1. n. 61. † L. 1. n. 20.

Soit AD nommé c. 1°. $aa = bb + cc$ [a], & puiſque par la ſuppoſition $3bb = aa$: donc $3bb = bb + cc$: ôtant de part & d'autre bb, on aura $2bb = cc$.

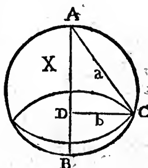


2°. $\div AD.CD.BD$, ou $\div c.\ b.\ BD$ par l'hypotheſe : donc cc ou $2bb.\ bb :: AD.\ DB$ [b]. Donc AD ſera double de BD, & conſéquemment DB eſt un tiers de AB ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

Le quarré d'un des côtez du tetraëdre *ou pyramide équilaterale, eſt égal à ſix fois le quarré de la troiſieme partie du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.* 149

Le *tetraëdre* ou pyramide équilaterale, eſt fait de quatre triangles égaux & équilateraux. Concevons que dans la ſphere X il y a un *tetraëdre* inſcrit, dont AC ou a eſt un des côtez, & que CD eſt le rayon du cercle dans lequel eſt inſcrit un des triangles équilateraux qui compoſent ce ſolide : $\overline{AC}^2 = 3\overline{CD}^2$, ou $aa = 3bb$ [c] ; par conſéquent DB eſt la troiſieme partie de AB diametre de la ſphere X, par le Lemme précédent. Soit donc $BD = c$, & par conſéquent $AB = 3c$. Puiſque $\div 3c.\ a.\ 2c$ [d] : donc $6cc = aa$ [e] ; ce qu'il falloit démontrer.



a *L.* 4. *n.* 78. b *L.* 3. *n.* 86. c *L.* 4. *n.* 146.
d *L.* 4. *n.* 28. e *L.* 3. *n.* 57.

COROLLAIRE.

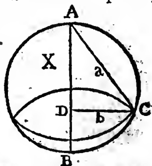
150 *Le quarré du diametre de la sphere, est en raison sesquialtere avec le quarré d'un des côtez du* tetraëdre *qui lui est inscrit.* Eucl. XIII. Prop. 13.

On vient de prouver que aa, quarré du côté du *tetraëdre*, est égal à six fois le quarré de c troisieme partie du diametre de la sphere. Or le quarré de $3c$ diametre de la sphere est $9cc$; ainsi la raison du quarré du côté du *tetraëdre* à celui du diametre de la sphere sera comme $6cc$ à $9cc$, ou 6 à 9, qui est une raison sesquialtere.

THEOREME III.

151 *Le côté du* tetraëdre *est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance, avec le diametre de la sphere où il est inscrit.*

Soit comme ci-dessus AC, ou a côté du *tetraëdre*, & AB ou $3c$ diametre de la sphere, dont DB par ce qui a été démontré dans le Théorême précédent, est égal à c, & $AD = 2c$; ainsi $\div 3c.\ a.\ 2c$*: donc $9cc.\ aa :: 3c.\ 2c$†. Or ces nombres 3 & 2 ne sont pas nombres quarrez; donc a sera incommensurable en lui-même avec $3c$, & commensurable en puissance ‡. Nous venons de voir dans le Théorême précédent, que aa est au quarré du diametre de la sphere comme 6 à 9.



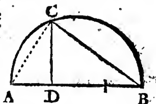
PROBLEME III.

152 *Inscrire un* tetraëdre *dans une sphere, ou trouver un cercle capable d'une des faces du* tetraëdre. Eucl. XIII. Prop. 13.

Il

* L. 4. n. 28. † L. 3. n. 86. ‡ L. 4. n. 115.

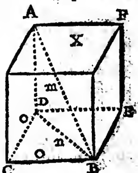
Il faut couper *AB* diametre de la ſphere en trois parties égales, de ſorte que *DB* ſoit double de *AD*, & ſur *D* élever la perpendiculaire *DC*, laquelle ſera le rayon d'un cercle, dans lequel ayant fait un triangle équilateral dont *BC* eſt le côté, vous aurez une des faces du *tetraëdre*, comme il eſt évident *.



THEOREME IV.

*Le quarré du diametre de la ſphere eſt triple du quarré de chaque côté du cube, ou de l'*hexaëdre *qui lui eſt inſcrit.* Eucl. XIII. Prop. 15. 153

Le cube ou l'*hexaëdre X* eſt inſcrit dans une ſphere. Soit la diagonale $AB = m$, qui eſt le diametre de la ſphere, la diagonale d'une des faces du cube ſoit *BD*. Je nomme *o* tous les côtez de ce cube, qui ſont tous égaux. $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$, ou $mm = nn + oo$ †. De même $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$, ou $nn = 2oo$. Subſtituant donc en place de nn ſa valeur $2oo$, on aura $mm = 3oo$, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.



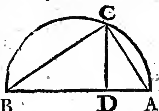
PROBLEME IV.

*Le diametre de la ſphere étant donné, trouver le côté du cube ou de l'*hexaëdre *qui peut y être inſcrit, ou trouver un cercle capable d'une des faces du cube.* Eucl. XIII. Prop. 15. 154

Soit *AB* le diametre de la ſphere où il faut inſcrire un cube, je le diviſe en trois parties, de

* *Sup.* n. 1491. † L. 4. n. 78.

ſorte que BD eſt double de AD: ſur D j'éleve la perpendiculaire CD, & de C je mene une ligne à A, qui ſera le côté du cube que je cherche. Car ſoit $BA = 3c$ & $CA = d$: donc $\div\div\ 3c.\ d.\ c$ *. Donc $3cc = dd$ †. Le quarré de AB ou de $3c$ eſt $9cc$; donc le quarré de AB eſt triple de celui de d, qui ne vaut que $3cc$. Partant AC eſt le côté du cube qu'on cherchoit, par le Théorême précédent.



Enſuite ſi on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont AC ſoit un des côtez, & lui circonſcrire un cercle qui ſera celui qu'on demande.

THEOREME V.

355 *Le côté du cube eſt incommenſurable en lui-même, & commenſurable en puiſſance, avec le diametre de la ſphere.* (Même figure.)

AC ou d, côté du cube, eſt moyen proportionnel entre tout le diametre AB ou $3c$, & ſa troiſieme partie c; ainſi puiſque $\div\div\ 3c.\ d.\ c$; donc $3c.\ c :: 3.\ 1.$ Ces deux nombres 3 & 1 ne ſont pas deux nombres quarrez, partant AC eſt incommenſurable avec AB en lui-même; mais commenſurable en puiſſance, puiſque ſon quarré eſt le tiers de AB ‡.

THEOREME VI.

356 *Le quarré de chaque côté d'un* octaëdre *eſt la moitié de celui du diametre de la ſphere où il eſt inſcrit.* Euclid. XIII. Prop. 14.

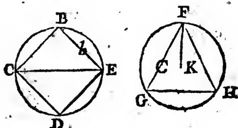
Un *octaëdre* eſt compoſé de huit triangles équilateraux tous égaux, dont les côtez ſont cordes du quart du cercle ou de nonante degrez. Or

* L. 4. n. 28. † L. 3. n. 57. ‡ L. 4. n. 131.

Or il est évident que le quarré de la corde de nonante degrez est la moitié de celui du diametre : car deux cordes de nonante degrez font un angle droit, dont la base est le diametre du cercle ; ainsi le quarré de ces deux cordes est égal à celui du diametre, qui est par conséquent le double de celui de chacune de ces deux cordes.

THEOREME VII.

Le même cercle comprend le quarré qui est une 157
des faces du cube, & le triangle qui est une des faces de l'octaëdre, l'un & l'autre inscrit dans la même sphere. Eucl. XIV. Prop. 8.



Soit *BCDE* un quarré face d'un cube, inscrit dans un cercle. *FGH* est un triangle face d'un *octaëdre* inscrit dans un cercle. Il faut démontrer que si ces deux solides sont inscrits dans une même sphere, ces deux cercles sont égaux.

Soit a le diametre de la sphere, b le côté du quarré qui est une des faces du cube, & c le côté du triangle qui est une des faces de l'*octaëdre*. Soit nommé y le rayon du cercle capable du quarré du cube, & x celui du cercle qui est capable du triangle de l'*octaëdre*. Il faut prouver que $y = x$.

1°. Si on conçoit bb le quarré du cube inscrit dans un cercle dont y est le rayon, il est évident

que $2yy = bb$ [a]. Et puisque $3bb = aa$ [b]: donc $aa = 6yy$. 2°. $3xx = cc$ [c]. Or $2cc = aa$ [d]: donc $6xx = aa$. Ainsi puisque $6yy = aa = 6xx$, donc $6yy = 6xx$; donc $y = x$: ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

158 *Le côté d'un* octaëdre *est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diametre de la sphere où il est inscrit.*

Le quarré de chaque côté de l'*octaëdre* est à celui du diametre de la sphere, comme 1 à 2 [e]. Or 1 & 2 ne sont pas des nombres quarrez; donc ce côté est incommensurable en lui même, avec le diametre de la sphere [f], & commensurable en puissance, puisque son quarré est moitié de celui de la sphere.

PROBLEME V.

159 *Trouver le côté d'un* octaëdre, *& un cercle capable d'une des faces de ce solide.*

Trouvez par le Problême quatrieme un cercle capable d'un des côtez du cube. Par le Théorême septieme, ce cercle est capable d'une des faces de l'*octaëdre*. Il ne s'agit donc que de faire un triangle équilateral dans ce cercle. Le côté de ce triangle sera celui qu'on cherche.

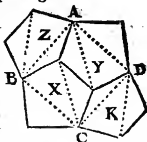
THEOREME IX.

160 *Ayant mené des diagonales ou cordes sur les douze pentagones qui font le* dodecaëdre, *celles de ces diagonales qui se joindront formeront six quarrez qui sont les six faces d'un* hexaëdre *ou cube inscrit dans la même sphere que le* dodecaëdre.

Soient

a *L. 4. n. 78.* b *sup. n. 153.* c *L. 4. n. 146.*
d *sup. n. 156.* e *sup. n. 156.* f *L. 4. n. 115.*

Soient *KXZY* quatre pentagones faces d'un *dodecaëdre* (*ayez à la main en lisant ceci un* dodecaëdre): concevez sur chacune de ces faces des diagonales, une de *A* à *B*, de *B* à *C*, de *C* à *D*, & de *D* à *A*, ainsi sur toutes les autres faces; il faut prouver 1°. que ces quatre diagonales font un quarré, savoir *ABCD*. 2°. Que les autres diagonales avec celles-ci, forment six quarrez égaux à *ABCD*, lesquels font un cube inscrit dans la même sphere que le *dodecaëdre*; ainsi chaque côté de ce cube est égal à chaque diagonale des pentagones.



1°. Toutes ces diagonales sont égales, soutenant des angles égaux.

2°. Concevons que des quatre points *A*, *B*, *C*, *D* qui sont sur la sphere où le *dodecaëdre* est inscrit, on ait mené des lignes au centre de la sphere, cela fera une pyramide quadrilaterale, dont le plan qui couperoit la sphere & passeroit par ces quatre points feroit la base.

3°. Cette section de la sphere par le plan *ABCD* sera un cercle *. Or on ne peut inscrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le seul quarré; car ces quatre angles valent quatre droits †: & puisqu'ils sont appuyez sur des arcs égaux, ils sont égaux. Donc la figure *ABCD*, qui a ses côtez égaux, & qui est inscrite dans un cercle, est un quarré.

4°. Tout pentagone se peut réduire en trois triangles; partant la surface d'un *dodecaëdre*, com-

* *Sup. n.* 145. † *L.* 2. *n.* 113.

composée de douze pentagones, se réduit en trente-six triangles. Or chaque quarré égal à *ABCD* en soutient six, comme il se voit dans la figure; donc ces trente-six triangles ne peuvent être soutenus que par six quarrez égaux, qui forment un cube inscrit dans la même sphere; & partant il est vrai de dire que la diagonale d'un pentagone, qui est une des faces du *dodecaëdre* inscrit dans une sphere, est égale au côté du cube inscrit dans la même sphere.

PROBLEME VI.

161 *Trouver le côté d'un* dodecaëdre, *& un cercle capable d'une des faces de ce solide.* Eucl. XIII. Prop. 17.

Il faut premierement trouver le côté d'un cube inscrit dans la sphere proposée [a]. Ce côté est égal à la diagonale de chaque pentagone face du *dodecaëdre* [b]. Il faut couper ce côté en moyenne & extrême raison: la plus grande partie sera le côté du *dodecaëdre* proposé [c].

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du *dodecaëdre*, il faut faire le pentagone dont on vient de connoitre un des côtez [d], ensuite lui circonscrire un cercle, qui sera ce qu'on cherche.

THEOREME X.

162 *Le côté du* dodecaëdre *est incommensurable avec le diametre de la sphere, tant en lui-même qu'en seconde puissance.* Eucl. XIII. Prop. 17.

Soit le diametre de la sphere *b*; celui du côté du cube inscrit dans la sphere *c*+*d* coupé en moyenne & extrême raison, dont *c* la plus grande partie est le côté du *dodecaëdre* [e].

2°.

a *sup. n.* 154. b *sup. n.* 160. c *L.* 4. *n.* 153. d *L.* 4. *n.* 159. e *L.* 4. *n.* 153.

2°. c est incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec $c + d$ [a].

3°. $c + d$ est commensurable en deuxieme puissance avec b [b], c'est-à-dire, que $cc + 2cd + dd$ est commensurable avec bb. Il faut donc que cc soit incommensurable avec bb; car s'il étoit commensurable avec bb, il le seroit avec le quarré de $c + d$ [c], avec lequel bb est commensurable, puisque bb est le triple de ce quarré [d], par conséquent cc incommensurable en puissance avec bb, est aussi incommensurable en lui-même avec b [e].

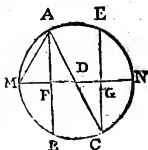
LEMME II.

MN *est le diametre d'un cercle, dans lequel* 163
les deux cordes AB *&* CE *qui coupent* MN *à angles droits, sont paralleles entre elles, & la distance de* FG *égale à la moitié de chacune; je dis que* MF *sera le côté d'un décagone inscrit dans un cercle, dont* FA *sera le rayon.*

Supposant MF ou $GN = x$ & $AF = z + x$: si MF ou x est le côté d'un décagone, dont AF ou $z + x$ est le rayon; il faut qu'ayant coupé AF en moyenne & extrême raison, x en soit la mediane [f], & que par conséquent $\div z + x . x z$; ainsi si nous démontrons cela, savoir que $\div z + x . x . z$, nous avons fait ce qui est proposé.

Puisque $AF = z + x$; donc $AB = 2z + 2x$, & $BC = z + x$. Le quarré de AB, qui est $4zz + 8zx + 4xx$, avec celui de BC qui est $zz + 2zx + xx$ font égaux à celui de AC ou MN [g]. Or par l'hypothese $MN = 3x + z$; car MF & GN sont chacun égaux à x, & $FG = z + x$: le quarré, dis-je, de $3x + z$ est $9xx + 6xz$ +

a *L.* 4. *n.* 140. b *sup. n.* 155. c *L.* 4. *n.* 113. d *sup. n.* 153.
e *L.* 4. *n.* 115. f *L.* 4. *n.* 151. g *L.* 4. *n.* 78.



$+zz$: mettant donc les deux quarrez de *AB* & de *BC* en une somme $9xx+6xz+zz = 5zz+10zx+5xx$; ôtant de part & d'autre $5xx+6xz+zz$, il restera $4xx = 4zz + 4zx$; divisant l'un & l'autre par 4, il viendra $xx = zz + zx$; donc remettant cette égalité en proportion[a] on aura $\div z+x . x . z$, puisque le produit des extrêmes $z+x$ & z, qui est $zz+zx$, est égal à xx quarré de la grandeur moyenne x; c'est ce qu'il falloit démontrer.

Lemme III.

164 *La ligne* AM *est le côté d'un pentagone inscrit dans un cercle, dont* AF *est le rayon.* (Même figure.)

MF est le côté du décagone dans un cercle dont *AF* est le rayon[b], le quarré de *AF* avec celui de *MF* sont égaux à celui de *AM*; donc *AM* est le côté du pentagone[c].

Lemme IV.

165 *Le quarré de* AF, *ou de* BF, *ou de* GE, *ou de* GC *lignes égales, est la cinquieme partie de celui du diametre* AC *ou* MN. (Même fig.)

Soit $AF = b$; donc $AB = 2b$, & $BC = b$, le quarré de *AB* est $4bb$, & celui de *BC* est bb. Or ces deux quarrez qui font $5bb$, font égaux à celui de *AC* ou de *MN*[d]; ainsi il vaut cinq fois celui de *AF*.

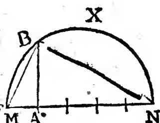
Lem-

a *L.* 3. *n.* 58. b *sup. n.* 165. c *L.* 4. *n.* 164. d *L.* 4. *n.* 78.

LEMME V.

Trouver une ligne dont le quarré soit la cinquieme partie de celui de MN, *diametre de* X *cercle donné.* 166

AM est la cinquieme partie de *MN*, le quarré de *MN* peut cinq fois celui de *MB* *; ainsi *MB* sera la ligne que l'on cherchoit, c'est-à-dire, égale à *AF* de la figure précédente, puisque le quarré de *AF* est la cinquieme partie de *MN* †.



PROBLEME VII.

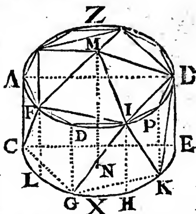
MN *diametre d'une sphere étant donné, faire un* icosaëdre. Eucl. XIII. Prop. 16. 167

1°. Ayant trouvé la valeur de *AF*, (*Voyez la figure du Lemme 2. pag. précéd.*) & l'ayant coupé par la moitié: du centre *D* je fais *DF* & *DG* égales à cette moitié, de sorte que *FG* = *AF*; après je mene *AB* & *CE*, qui coupent *MN* à angles droits.

2°. Prenant *AB* & *CE* pour diametres, je fais deux cercles que je nomme *Z* & *X*, qui sont paralleles, (*Voyez la figure suivante*,) étant sur des plans qu'on suppose paralleles.

3°. J'inscris dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je mene des lignes droites à *M* & à *N* extrémités du diametre de la sphere; ce qui fait cinq triangles, dont les côtez sont égaux chacun au côté du pentagone inscrit dans ces deux cercles, par le Lemme troisieme; ainsi tous les

* *L. 4. n. 63.* † *Sup. n. 165.*



les côtez de ces triangles étant tous égaux aux côtez des pentagones, forment deux angles solides sur les cercles *Z* & *X* chacun de cinq triangles équilateraux, dont le sommet est aux extrémitez *M* & *N* du diametre de la sphere, & voilà déja dix faces trouvées de l'*icosaëdre*.

On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle solide ni ses côtez dont le sommet est N, *de peur de rendre la figure confuse ; il y faut suppléer par la pensée.*

4°. J'inscris encore dans ces mêmes cercles *Z* & *X* un décagone, dont je joins les angles qui se répondent dans *X* & *Z* par les lignes *BE*, *PK*, *IH*, *DG*, *FL*, &c. qui par l'hypothese seront toutes égales aux rayons de *Z* & de *X*.

5°. Je mene les diagonales *BK*, *KI*, *IG*, *GF*, &c. Les quarrez *BP*, côté du décagone, avec celui de *PK*, qui est égal au rayon de *Z* & de *X*, sont égaux à celui de *BK* * : donc *BK* est le côté du pentagone inscrit dans *X* & dans *Z* †. La même chose se démontre de *KI*, de *IG*, de *GF*, &c. les triangles *BKI*, *KIG*, *IGF*, &c. ont pour base les côtez dudit pentagone ; ils sont donc équilateraux entre eux, & aux dix qui composent les deux angles solides, dont nous avons parlé ci-dessus : par conséquent il y a entre *Z* & *X* dix de ces triangles, dont cinq ont

* *L.* 4. *n.* 71. † *L.* 4. *n.* 164.

ont leurs bases sur Z, & les cinq autres sur X, lesquels avec les dix déja trouvez font les vingt triangles égaux & équilateraux qui doivent composer l'*icosaëdre*; ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE I.

168 *Le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du rayon du cercle* X *ou* Z, *qui est la base d'un angle solide fait de cinq équilateraux.*

Cela a été démontré dans ce Theorême, & ailleurs *.

COROLLAIRE II.

169 *Le diametre* MN *est composé du côté de l'hexagone, ou du rayon des cercles* Z & X, & *de deux côtez du décagone inscrit dans ces cercles.*

Cela a été démontré dans ce Théorême, & ci-devant †.

COROLLAIRE III.

170 *Les côtez des triangles de l'*icosaëdre *sont égaux aux côtez des pentagones inscrits dans* Z *ou* X.

THEOREME XI.

171 *Les côtez de l'*icosaëdre *sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance, avec le diametre de la sphere où l'*icosaëdre *est inscrit.* Euclid. XIII. Prop. 16.

Le quarré du rayon des cercles qu'on décrit pour faire l'*icosaëdre*, est la cinquieme partie de celui du diametre de la sphere ‡. Soit ce quarré *bb*, partant celui du diametre de la sphere est 5*bb*. Ces deux quarrez sont donc com-

* *sup. n.* 165. † *sup. n.* 163. ‡ *sup. n.* 168.

commenſurables, étant comme 1 à 5. Soit *x* côté des triangles qui font l'*icoſaëdre*, lequel *x* eſt un des côtez d'un pentagone inſcrit dans un cercle dont *b* eſt le rayon *, partant *bb* & *xx* quarrez du côté du pentagone dont *b* eſt le rayon, ſont incommenſurables, auſſi bien que leurs racines *x* & *b* †. Et puiſque le quarré *bb* du rayon eſt commenſurable avec le quarré du diametre de la ſphere, il faut que *xx* ſoit incommenſurable avec le quarré de ce diametre; car s'il étoit commenſurable avec lui, il le feroit ⸸ avec celui de *b*; & ſi *xx* & le quarré du diametre ſont incommenſurables, *x* & le diametre le ſont auſſi, puiſque les raiſons des quarrez ſont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainſi ſi les doublées ſont ſourdes, il faut que les compoſantes le ſoient auſſi: car le produit de deux nombres eſt un nombre.

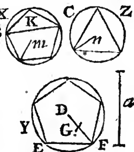
THEOREME XII.

172 *Le même cercle comprend le pentagone qui eſt une des faces du* dodecaëdre, *& le triangle équilateral qui eſt une des faces de l'*icoſaëdre. Eucl. XIV. Prop. 3.

X & *Z* ſoient deux cercles, dans leſquels ſuppoſé que le pentagone de *X* eſt une des faces d'un *dodecaëdre*, & le triangle équilateral de *Z* une des faces de l'*icoſaëdre*, ces deux corps inſcrits dans une même ſphere dont le diametre eſt *a*. Il faut prouver que *m*, rayon de *X*, eſt égal à *n* rayon de *Z*.

Je fais le pentagone *Y* dont chaque côté eſt égal au côté de l'équilateral, face de l'*icoſaëdre*. Ce pentagone eſt ainſi la baſe de cinq des triangles de l'*icoſaëdre* ‡. Je coupe *DF*, rayon

* *ſup. n.* 170. † *L.* 4. *n.* 170. ⸸ *L.* 4. *n.* 113. ‡ *ſup. n.* 170.



rayon de *Y*, au point *G* en moyenne & extrême raison. *D G* la plus grande partie est le côté du décagone [a]. Soit pareillement coupé *B C* en moyenne & extrême raison au point *K*, la plus grande partie *B K* sera égale au côté de ce pentagone [b]: donc $BC \, . \, DF :: BK \, . \, DG$ [c]; ainsi $\overline{BC}^2 \, . \, \overline{DF}^2 :: \overline{BK}^2 \, . \, \overline{DG}^2$ [d], & $3\overline{BC}^2 \, . \, 5\overline{DF}^2 :: 3\overline{BK}^2 \, . \, 5\overline{DG}^2$ [e]. Or *BC* est égal au côté de l'*hexaëdre* [f], dont trois quarrez sont égaux à *aa*, quarré du diametre de la sphere dans laquelle il est inscrit [g]. Et $5\overline{DF}^2$ est aussi égal à *aa* [h]: donc $3\overline{BC}^2 = 5\overline{DF}^2$. Ainsi dans la proportion ci-dessus, y ayant égalité entre $3\overline{BC}^2$ & $5\overline{DF}^2$, il y aura aussi égalité entre $3\overline{BK}^2$ & $5\overline{DG}^2$: donc puisque $\overline{FE}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DG}^2$ [i]: donc $5\overline{FE}^2 = 5\overline{DF}^2 + 5\overline{DG}^2$: donc aussi $5\overline{FE}^2 = 3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2$: car on vient de faire voir $3\overline{BC}^2 = 5\overline{DF}^2$, & $3\overline{BK}^2 = 5\overline{DG}^2$.

Mais $3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2 = 15\,mm$ [k], & $5\overline{FE}^2 = 15\,nn$ [l]: car *FE* est supposé égal au côté du triangle équilateral dont *n* est le rayon, & par con-

a *L.4.n.151.* b *L 4.n.153.* c *L.4.n.67.* d *L.3.n.84.* e *L.3.n.54.* f *sup.n.160.* g *sup.n.153.* h *sup.n.168.* i *L.4.n.164.* k *L.4.n.165.* l *L.4.n.146.*

conséquent puisque $15\,mm = 3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2 = 5\overline{FE}^2 = 15\,nn$. Donc $15\,mm = 15\,nn$, ou $mm = nn$, & conséquemment $m = n$; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME VIII.

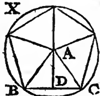
173 *Le diametre d'une sphere étant donné, trouver les côtez des cinq corps réguliers qui y sont inscrits.* Eucl. XIII. Prop. 18.

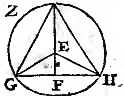
Il faut faire ce qui a été enseigné pour trouver le rapport de chaque côté des corps réguliers avec le diametre de la sphere où ils sont inscrits.

THEOREME XIII.

174 *La surface du* dodecaëdre *est égale à trente fois le rectangle fait d'un des côtez du pentagone une de ses faces, & de l'apothême de ce pentagone; & celle de l'*icosaëdre *à trente fois le rectangle fait d'un des côtez de l'équilateral une de ses faces, & de l'apothême de ce triangle.* Eucl. XIV. Prop. 4.

Ayant mené des lignes du centre du pentagone & de l'équilateral à leurs angles, *X* sera partagé en cinq triangles, & *Z* en trois; ainsi les douze faces du *dodecaëdre* en soixante triangles, comme les vingt faces de l'*icosaëdre* en soixante. Or chacun de ces triangles, comme *ABC*, est égal au rectangle de *AD* apothême, & de *BD* moitié de *BC*, comme aussi *GEH* au rectangle de *EF* par *GF* moitié de *GH**: Donc, &c.





Co-

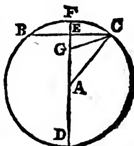
* L. 2. n. 135.

COROLLAIRE.

La surface du dodecaëdre *est donc à celle de* 175
*l'*icosaëdre, *comme* AD×BD *est à* EF×FG.

LEMME VI.

L'Apothême du pentagone est égal à la moitié 176
d'une ligne égale au côté de l'hexagone & du décagone inscrit dans le même cercle. Euclid. XIV. Prop. 1.



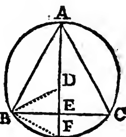
BC est le côté d'un pentagone, par conséquent *FC* côté de la moitié de l'arc *BFC*, est le côté du décagone, & *AC* rayon du cercle côté de l'hexagone. *AE* est l'apothême du pentagone. Il faut prouver que *AE* est égal à la moitié de *AC* + *CF*. Je fais *GE* égale à *EF*; & partant *GC* = *FC* *.

1°. *FC* étant la dixieme partie du cercle de l'angle *FAC*, est de trente-six; & puisque l'arc *CD* vaut quatre fois trente-six degrez, donc l'angle *CFD* est de soixante-douze double de trente-six †. Puisque *GC* = *CF*: dont *FCG* est isoscele, donc l'angle *FGC* sera aussi de soixante-douze degrez: donc *CGA* est de cent huit ‡. Ajoutez *GAC* de trente-six, cela fera cent quarante-quatre que j'ôte de cent quatre-vingts, reste trente-six valeur de *ACG*, qui est ainsi égal à *GAC*; par conséquent *AG* = *GC* = *FC*: donc *AG* = *FC*. Ainsi *AG* + *GE* = *FC* + *FE*, ou *AE* = *FC* + *FE*: Donc *AE* + *EF* + *FC* est le double de *AE*: donc *AE* est la moitié de *AE* + *EF* (ou

* L. 1. n. 58. † L. 2. n. 59. ‡ L. 2. n. 17.

AF rayon) + *FC*; & par conséquent moitié du côté de l'hexagone, & de *FC* côté du décagone.

LEMME VII.



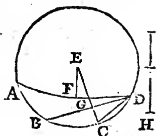
177 ABC *est un équilateral*, AE *une perpendiculaire qui coupe* BC: *je dis que* DE = EF.

BF est côté de l'hexagone, ainsi égal au rayon *BD*; donc *DE* = *EF* [a].

THEOREME XIV.

178 *La surface du* dodecaëdre *est à celle de l'*icosaëdre, *comme le côté du cube est au côté de l'*icosaëdre, *inscrits en une même sphere*. Eucl. XIV. Prop. 5.

AD est le côté du triangle face de l'*icosaëdre*, & *BD* est le côté du triangle face du *dodecaëdre* qu'un même cercle peut comprendre [b]. *EF* coupe par la moitié *AD*, comme *EC* coupe par la moitié *BD*; & par conséquent l'arc *BCD* [c]: donc *CD* est la corde du décagone. *H* est le côté d'un cube inscriptible en la même sphere.



1°. ∻ *EC* + *CD*. *EC*. *CD* [d]. Or *EG* est la moitié de *EC*+*CD*, & *EF* la moitié de *EC* [f], comme aussi *EG* − *EF* moitié de *CD*: car 2 *EG* = *EC* + *CD* [g], & 2 *EF* = *EC* [h]: donc 2 *EG*

a *L.* 1. *n.* 61. b *sup. n.* 172. c *L.* 1. *n.* 92. d *L.* 4. *n.* 154. e *sup. n.* 176. f *sup. n.* 177. g *sup. n.* 176. h *sup. n.* 177.

$2\,EG = 2\,EF + CD$. Otant de part & d'autre $2\,EF$, vient $2\,EG - 2\,EF = CD$: donc $EG - EF$ est moitié de CD. On a vu que $\div EC + CD.\ EC.\ CD$: donc leurs moitiez sont en même raison; ainsi $\div EG.\ EF.\ EG - EF$. Mais la ligne H étant le côté du cube, si on la coupe en moyenne & extrême raison, BD sera son plus grand segment [a]. Ainsi $\div H.\ BD.\ H - BD$. Donc $H.\ BD :: EG.\ EF$ [b]. Donc $H \times EF = BD \times EG$. Or $H.\ AD :: H \times EF.\ AD \times EF$ [c]. Donc $H.\ AD :: BD \times EG.\ AD \times EF$; c'est-à-dire, comme H côté du cube est à AD côté de l'*icosaëdre*, de même $BD \times EG$ est à $AD \times EF$; mais ces deux produits sont entre eux en même proportion que les surfaces du *dodecaëdre* & de l'*icosaëdre* [d]: donc &c. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XV.

AB *rayon étant coupé en* C *en moyenne & extrême raison, &* AC *le plus grand segment, le quarré de* BG *côté du* cube, *sera à celui de* BK *côté de l'*icosaëdre, *comme* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *est à* $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Eucl. XIV. Prop. 6. 179

Soit $BFGHI$ un pentagone une des faces du *dodecaëdre*, & BKL un triangle face de l'*icosaëdre*; ce qui est possible [e]. BG est le côté du *cube* inscrit dans une même sphere [f]: donc $\overline{BK}^2 = 3\overline{AB}^2$ [g]. Or $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 3\overline{AC}^2$ [h]: donc $\overline{BK}^2$ est triple de $\overline{AB}^2$, comme $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ est

a *sup. n.* 160. & *L.* 4. *n.* 153. b *L.* 4. *n.* 67. c *L.* 4. *n.* 75. d *sup. n.* 175. e *sup. n.* 172. f *sup. n.* 160. g *L.* 4 *n.* 146. h *L.* 4. *n.* 70.

est triple de $\overline{AC}^2$. Ainsi $\overline{BK}^2 . \overline{AB}^2 :: \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 . \overline{AC}^2$. *Permutando* $\overline{BK}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 :: \overline{AB}^2 . \overline{AC}^2$. Or BF est le plus grand segment de BG côté du cube coupé en moyenne & extrême raison [a]: Donc $\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{BG}^2 . \overline{BF}^2$ [b], :: $\overline{BK}^2$, $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ [c]. *Permutando* $\overline{BG}^2 . \overline{BK}^2 :: \overline{BF}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$. Or $\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ [d]. AB & AC étant côtez de l'hexagone & du decagone [e]. Mettant $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ en la place de $\overline{BF}^2$, nous aurons $\overline{BG}^2 . \overline{BK}^2 :: \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVI.

110 *Comme le côté du* cube *est au côté de l'*icosaëdre, *ainsi le* dodecaëdre *est à l'*icosaëdre *inscrits dans une même sphere.* Eucl. XIV. Prop. 7.

Concevez que de tous les angles d'un *dodecaëdre*, & de même de l'*icosaëdre*, on ait mené des lignes au centre de la sphere. Cela fera dans l'un douze pyramides, & dans l'autre vingt, qui seront de même hauteur, puisque le même cercle dans la sphere comprend une des faces de l'*icosaëdre* & du *do-de-*

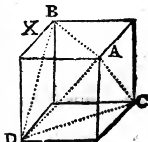
a *sup. n.* 160. b *L.* 4. *n.* 67. c *L.* 3. *n.* 53.
d *L.* 4. *n.* 164. e *L.* 4. *n.* 151.

decaëdre [a]; ainsi ces pyramides sont comme leurs bases [b], c'est-à-dire, comme les surfaces de ces deux polyédres. Or ces surfaces sont entre elles [c] comme le côté du *cube* au côté de l'*icosaëdre*.

PROBLEME. VII.

Inscrire un tetraëdre *dans un* cube. Euclid. XV. Prop. 1. 181

De *A* un des angles du cube *X*, concevant qu'on ait mené les diagonales *AB*, *AC*, *AD*, & *BD*, *BC*, *CD*, vous appercevrez *ABCD* un *tetraëdre* ou pyramide de quatre triangles équilateraux, car les diagonales sont égales; ainsi le triangle $ABC = BAD$, &c.



Il faut avoir à la main les corps réguliers dont on parle. Il est facile de les faire selon qu'on l'a enseigné [d]. *Tout ce qu'on va lire sera aisé, faisant sur chaque corps ce qu'on dit ici qu'il y faut faire ; autrement les démonstrations suivantes seront obscures.*

PROBLEME VIII.

Inscrire un octaëdre *dans une pyramide ou* tetraëdre. Eucl. XV. Prop. 2. 182

Coupez par la moitié tous les six côtez de la pyramide ou tetraëdre; joignez les points de section par douze lignes qui feront toutes égales, & feront huit triangles équilateraux.

 PRO-

a *sup. n.* 172. b *sup. n.* 123. c *sup. n.* 198.
d *sup. n.* 144.

PROBLEME IX.

183 *Dans un cube faire un* octaëdre. Eucl. XV. Prop. 3.

Ayant pris le centre de chaque face du cube, il faut joindre ces centres en tirant des lignes autant qu'il en faut; savoir douze, qui étant toutes égales feront huit triangles égaux, & par conséquent un *octaëdre*.

PROBLEME X.

184 *Dans un* octaëdre *faire un* cube. Eucl. XV. Prop. 4.

1°. Coupez par la moitié tous les côtez de l'*octaëdre*. 2°. Menez des lignes par toutes ces sections sur les faces de ce corps, ces lignes feront toutes égales, & feront deux quarrez opposez, lesquels joignant par quatre autres lignes qui feront égales aux premieres, & les opposées étant paralleles, elles feront un cube; ce qui est évident.

PROBLEME XI.

185 *Faire un* dodecaëdre *dans un* icosaëdre. Eucl. XV. Prop. 5.

Cinq triangles de l'*icosaëdre* qui font un angle solide ou une pyramide, ont pour base un pentagone*. Il faut couper tous les côtez de cette pyramide par la moitié; le plan de cette section fera un pentagone & une des faces du *dodecaëdre*; car en faisant la même chose à tous les angles solides ou pyramides de l'*icosaëdre* qui sont au nombre de douze, on aura douze pentagones égaux, qui feront les douze faces du *dodecaëdre*.

AVER-

* *sup. n.* 167.

AVERTISSEMENT.

Le diametre de la ſphere étant ſuppoſé 1000, les côtez des corps réguliers inſcrits dedans ſeront à peu près comme les nombres ſuivans.

Le *Tetraëdre*	816
L'*Octaëdre*	707
L'*Hexaëdre* ou *Cube*	577
L'*Icoſaëdre*	527
Le *Dodecaëdre*	357



ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.

LIVRE SIXIEME.

De la Méthode.

AVERTISSEMENT.

LA Méthode que nous avons ſuivie juſqu'à préſent, ç'a été de conſiderer l'idée des choſes dont nous parlions, & d'en tirer leurs proprietez. Par exemple, quand il s'eſt agi de démontrer les proprietez du Cercle, nous avons conſideré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom; comment elle ſe faiſoit; ce qu'elle étoit: & c'eſt de l'idée de cette figure, que nous avons déduit ſes proprietez. Cette méthode ſuppoſe la choſe connue. Ces Elémens m'étoient connus avant que de les écrire; & ce que j'ai fait, ç'a été de faire appercevoir dans l'idée des choſes, ce qui y eſt, & ce que j'y avois vu. Il y a une autre méthode avec

avec laquelle on trouve ce qu'on ne connoiſſoit pas, & que j'ai employée moi-même dans ces Elémens en beaucoup d'occaſions, pour trouver ce que je ne ſavois point; c'eſt pourquoi on l'appelle Méthode d'Invention, *au-lieu que la premiere ſe peut nommer* Méthode de Doctrine. *Cette ſeconde eſt très-générale; & proprement elle ne ſuppoſe aucune connoiſſance. J'en ai déja parlé dans les Elémens des Mathématiques; mais je l'applique ici à la Géometrie, & je la traite d'une maniere particuliere; ainſi ce qu'on va voir n'eſt point une repetition inutile.*

CHAPITRE PREMIER.

De la méthode qu'il faut ſuivre dans l'examen d'une Queſtion, ou Problême. En premier lieu, il la faut bien concevoir, & l'exprimer nettement.

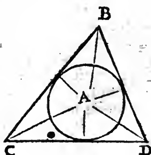
CE n'eſt que par l'application de l'eſprit, 1
qu'on atteint la verité: on ſe diſtrait facilement. Pour remedier à ce défaut, il faut arrêter ſon eſprit, exprimant par une figure ce qu'il doit conſiderer; ce qui n'eſt pas impoſſible, quoiqu'on ne connoiſſe pas entierement les choſes qui ſont en queſtion. Il faut bien qu'on ne les ignore pas entierement; autrement, ſi elles n'avoient aucune priſe, ce ſeroit en vain qu'on les attaqueroit. Or ce peu de connoiſſance donne lieu de ſuppoſer, que ſelon qu'on le propoſe, elles doivent être faites de telle & telle maniere. On peut donc tirer certaines lignes conformément à cette ſuppoſition. Ces lignes, puiſque l'on les tire telles qu'elles

doivent être, sont connues; &, comme on le va voir, elles peuvent faire connoitre celles qu'on cherche. La premiere chose qu'on doit faire, c'est de bien exprimer ce qui est en question, & qu'on veut connoitre. L'importance, c'est que cette expression soit nette, qu'on y voye ce qu'il faut chercher, & qu'elle soit débarassée de ce qui ne serviroit qu'à la rendre obscure. Cela se comprendra mieux dans les exemples suivans, où l'on va voir que la seule expression résout souvent des questions difficiles. J'entens ici les expressions qui se font par des figures, aussi-bien que par des discours.

QUESTION.

2 *Démontrer que la surface d'un triangle est égale à la moitié de la somme de ses trois côtez, multipliez par le rayon d'un cercle qui lui est inscrit.*

La seule vue de cette figure démontre, que cela est veritable. Des angles du triangle *BCD* ayant mené des lignes au centre *A* du cercle qui lui est inscrit, on fait les trois triangles *BAC*, *CAD*, *DAD* égaux ensemble au triangle *BCD*, & qui ont pour hauteur le rayon de ce cercle. Ils sont donc égaux à un triangle, dont la base est égale aux trois côtez de *BCD*, & qui a pour hauteur le rayon du cercle inscrit *; la surface de ce triangle est donc égale au produit de la moi-



* L. 2. n. 143.

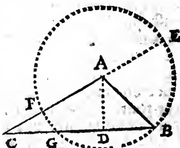
moitié de sa base par sa hauteur; ce qu'il falloit prouver.

Voyons encore par un autre exemple, combien la maniere d'exprimer une question par une figure convenable, en facilite la résolution.

QUESTION.

Démontrer que dans le triangle ABC, *si de l'angle* CAB *on mene une perpendiculaire sur* BC, *la somme des deux côtez* AB & AC *est à* BC, *base de l'angle que ces deux côtez comprennent, comme la difference de* CD & BD *est à celle de* AC & AB. 3

Pour trouver la démonstration de ce Théorême, & l'exprimer d'une maniere qui facilite l'invention, de *A* comme centre, & de l'intervalle *AB* le plus petit côté, je fais un cercle: Et puisque *AB* est égal à *AE*, la ligne *CE* est la somme des côtez *AC* & *AB*. Les lignes *AF* & *AB* sont égales; donc *CF* est leur difference. Puisque aussi $DB = DG$, la ligne *GC* sera la difference entre *CD* & *DB*.



Ainsi voilà une expression, ou une figure, qui marque ce que l'on cherche. Après quoi la question se résout facilement; car $CE \times CF = CB \times CG$ *: donc $CE . CB :: CG . CF$ †; ce qu'il falloit démontrer.

* L. 4. n. 57. † L. 3. n. 58.

CHAPITRE II.

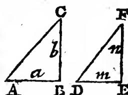
4 *On peut exprimer les lignes & toutes les grandeurs, dont il est parlé dans une question, & faire sur elles toutes les operations de l'Arithmetique, sans les connoître.*

CEtte méthode, que nous enseignons ici, est fort générale, & fort differente de celle qu'on a suivie jusqu'à présent. Nous recherchions les proprietez de quelque figure; & il s'agissoit de la maniere qu'on pouvoit trouver ses proprietez, & les démontrer. Ici on ne considere autre chose dans les Grandeurs qu'on examine, sinon qu'on les peut ajouter à d'autres grandeurs, ou les retrancher si elles sont petites: qu'on les peut multiplier, ou diviser. On a enseigné dans le troisieme Livre, comment cela se peut faire de tout ce qui est grand, c'est-à-dire, capable du plus ou du moins, soit lignes, soit nombres. Ainsi cette méthode est déja expliquée en partie, & nous en avons fait un usage par-tout. Si on a lu les Livres précédens, on ne peut donc ignorer que par $a+b$, on peut entendre deux lignes a & b ajoutées ensembles; par $a-b$, qu'on a retranché b de a; par ab qu'on a multiplié a par b ou b par a; qu'ainsi ab est un rectangle, dont les lignes a & b sont les côtez; que aa ou a^2 est un quarré, dont la ligne a est un des côtez; que $\frac{ab}{b}$ est un rectangle, ou plan divisé par b, après laquelle division il ne reste que le côté a, c'est-à-dire, que ce n'est plus qu'une ligne, suivant ce qu'on a enseigné au commen-

mencement du Livre troisieme, qu'on peut effacer la lettre qui est au-dessus & au-dessous du signe de la division; qu'ainsi $\frac{ab}{b} = a$.

5 Les puissances s'expriment de même, aussi-bien par lettres que par lignes; ainsi on marque par lettres les rapports des figures; car si un triangle est rectangle, dont l'hypothenuse est a & les deux côtez b & c, suivant qu'on l'a enseigné[a], ou[b] $aa = bb + cc$, ou $a^2 = b^2 + c^2$, & $a^2 - b^2 = c^2$, & $a^2 - c^2 = b^2$.

6 Tous les rapports des triangles semblables se peuvent exprimer de même par lettres; car si *ABC* & *DEF* sont semblables, que $AB = a$, & $BC = b$, & $DE = m$, & $EF = n$; alors $a . b :: m . n$: Et puisque, selon ce qui a été dit[c], multipliant b par m, & divisant le produit bm par le premier terme a, le quotient $\frac{bm}{a}$ est le quatrieme: donc $EF = \frac{bm}{a}$, & par le même raisonnement $\frac{bm}{n} = AB$. Ce qui donne le moyen de marquer les rapports des lignes, aussi-bien que des nombres.



7 Cette maniere générale d'exprimer toute grandeur, & de faire sur elle les operations qu'on fait sur les nombres, est ce qu'on appelle l'Algebre, comme nous l'avons dit[d]. Elle est difficile à ceux qui n'ont pas coutume de s'en servir; ce qui n'arrivera pas à ceux qui se sont servis de nos Elémens. Remarquez que dans la mul-

Q 7

a L. 2. n. 142. b L. 4. n. 78. c L. 3. n. 60. d L. 3. Sect. 1.

multiplication l'on peut réduire un produit à une proportion: par exemple, le produit de a par b, à une proportion dont le premier terme soit l'unité; le second & le troisieme soient les deux grandeurs a & b, qui se multiplient; & le quatrieme terme soit ab, qui est le produit de la multiplication, ce qui est évident: car, soit ce quatrieme terme nommé x: donc $1.\ a :: b.\ x$. Or $\frac{ab}{1} = x$*. Mais l'unité ne divisant point, comme ne multipliant point: donc $\frac{ab}{1} = ab$, & partant $ab = x$. Par-tout où l'unité n'est point, on la peut supposer, puisqu'elle n'apporte aucun changement. Ainsi le produit de trois lettres, comme abc, peut marquer ces deux proportions:

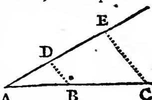
$1.\ c :: ab.\ abc$; & $1.\ ab :: c.\ abc$. Cela fait voir que le produit de quatre lignes $abcd$, marque trois proportions; le produit de cinq lignes $abcde$, marque quatre proportions; & dans ces proportions le produit total n'est qu'une ligne, qui résulte de toutes ces proportions, lorsque le premier terme est l'unité; car puisque
$1.\ a :: b.\ ab$; donc $1.\ b :: a.\ ab$.
De même, puisque $1.\ ab :: c.\ abc$;
Donc. $1.\ c :: ab.\ abc$.

Le quotient d'une division exprime une ligne, par exemple, $\frac{a}{b}$: car cela se peut réduire à cette proportion $b.\ a :: 1.\ x$: car $\frac{a1}{b}$ ou $\frac{a}{b} = x$.

8 Il est facile de faire toutes les operations de l'Arithmétique, avec le compas & la règle. On peut

* *L. 3. n. 60.*

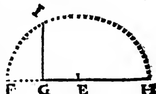
peut ajouter une ligne à une autre ligne, ou retrancher une plus petite d'une plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'eſt-à-dire pour trouver une ligne qui ſoit égale au produit de deux lignes, voilà ce qu'il faut faire. Soient ces deux lignes *AD* & *AC* qu'on veut multiplier l'une par l'autre ; il faut prendre ſur *AC* la ligne *AB* égale à l'unité, & mener une ligne *AD* qui faſſe un angle à diſcretion avec *AB*. Je tire une ligne par *D* & *B*, & une autre par *C* qui lui ſoit parallele ; ce qui étant fait, *AE* ſera la ligne que l'on cherche : car *AB*. *AD* :: *AC*. *AE* : donc $AB \times AE = AD \times AC$. La multiplication n'augmente pas une grandeur, qui n'eſt multipliée que par l'unité, c'eſt-à-dire, qui n'eſt priſe qu'une fois ; Ainſi comme *AB* eſt l'unité, en multipliant *AE*, elle ne l'augmente point. Donc *AE* qui eſt une quatrieme proportionnelle, ſera égale au produit de *AD* par *AC* ; ce que l'on cherchoit.



Si l'on veut diviſer *AE* par *AC*, ayant pris 9
AB égale à l'unité, & mené par *B* une parallele à *CE*, on aura *AD* qui ſera la valeur de *AE* diviſée par *AC* ; car *AB*. *AD* :: *AC*. *AE*, & l'unité eſt au quotient d'une diviſion, comme le diviſeur eſt à la grandeur diviſée.

S'il faut tirer la racine quarrée de *GH*, je lui 10
ajoute une ligne droite *FG* qui ſoit l'unité, & diviſant *FH* en deux parties égales au point *E* : du centre *E* je fais le cercle *FIH* : élevant enſuite du point *G* une ligne droite juſqu'à *I* à angles droits ſur *FH*, la ligne *GI* eſt la racine que l'on cherche : car ÷÷ *FG*. *GI*. *GH*. Donc le quar-

quarré de *GI*, eſt égal au produit de *GH*. Or, *FG* étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de *GH* en la multipliant, ainſi *GH* eſt égale au quarré de *GI*, qui par conſequent eſt la racine de *GH*. Par ce même moyen on peut trouver une ligne, qui ſoit égale à la racine quarrée d'un nombre qui n'eſt pas quarré; par exemple, qui ſoit égale à la racine d'un quarré qui vaut 18 : car prenant *GH* égale à 18, & lui ajoutant *FG* égale à l'unité; & de *E* milieu de cette ligne, comme centre, faiſant un cercle, la ligne *GI* ſera égale à la racine quarrée de 18, qui ne peut être exprimée par aucun nombre, comme nous l'avons vu dans le quatrieme Livre.



CHAPITRE III.

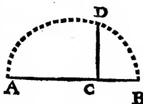
11 *Après avoir exprimé une Queſtion ou Problême, & fait la figure qui lui convient, il faut diſtinguer ce qui y eſt connu d'avec ce qui ne l'eſt pas; & conſiderer ſi le Problême eſt déterminé, ou indéterminé.*

APrès qu'on a conçu nettement une Queſtion ou un Problême, & fait la figure qui en exprime les conditions, il faut diſtinguer ces trois choſes. 1°. Les lignes qui ſont connues. 2°. Celles qui ne le ſont pas. 3°. Tous les rapports que ces lignes connues & inconnues peuvent avoir entre elles. Une partie des lignes qu'on tire pour exprimer le Problême ſont connues,

nues, les autres ſont ſuppoſées, c'eſt-à-dire, qu'on ſuppoſe qu'elles doivent avoir tels & tels rapports avec les lignes qui ſont connues. Or aujourd'hui c'eſt la coutume de marquer, par les premieres lettres de l'Alphabet, les lignes qui ſont connues, les nommant ou a, ou b, ou c, ainſi de ſuite. On marque avec les dernieres x, y, z, celles qui ſont inconnues: quelquefois il eſt bon de ſe ſervir des premieres lettres du nom des grandeurs connues & inconnues; par exemple marquant un nombre par n, une ſomme par s, le tems par t, la vîteſſe par v. Enſuite il faut conſiderer ſi de la maniere que le Problême eſt propoſé, il dépend de la volonté de choiſir certaines grandeurs, tirer certaines lignes, ou ſi toutes celles que la queſtion renferme, ſont déterminées, de ſorte que tout ce que l'on peut faire, ſoit de leur donner des noms convenables. Il faut donc examiner d'abord ſi la Queſtion eſt déterminée, ou indéterminée. Dans une Queſtion indéterminée, on n'y apperçoit point de rapport, qui donne le moyen d'exprimer en deux manieres les grandeurs inconnues. Car qu'eſt-ce qui fait que je puis appeller la même grandeur ou x, ou $y + a$? C'eſt que je ſai que x eſt égal à y, après lui avoir ajouté a; que $x = y + a$. C'eſt là un rapport déterminé.

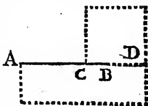
12 Mais quand, ſans en déterminer aucun, on propoſe par exemple de couper le diametre *AB*, de ſorte que le rectangle des deux parties ſoit égal à un quarré, ce Problême eſt indéterminé; & je ne puis trouver une double expreſſion, qu'en ſuppoſant un certain rapport; celui-ci par exemple, que *AB* eſt coupé en *C*. Après cela, de l'intervalle de la moitié de *AB* ayant fait un cercle, & élevé ſur *C* la perpendiculaire *CD*,

CD, j'aurai ce que je cherche $\div AC . CD . CB$ *: donc $AC \times CB = \overline{CD}^2$ †. Un Problême indéterminé peut avoir plusieurs résolutions ; car



en quelque part du diametre que soit C, le quarré de CD sera égal au rectangle des parties du diametre coupé comme on avoit proposé de le faire. Je pouvois couper AB ailleurs qu'en C.

13 Un Problême est dit déterminé, lorsqu'on n'y peut satisfaire qu'en observant certaine chose qui le détermine, & qui ne dépend pas du choix de celui à qui il est proposé, c'est-à-dire, que les grandeurs qu'il renferme, ont un certain rapport qui leur est particulier. Par exemple, AB étant divisé en C ; on propose de prolonger AB jusqu'en D, point inconnu ; de sorte que le quarré de CD soit égal au rectangle de AD & de BD : alors comme ce prolongement



BD est déterminé, c'est-à-dire, qu'il a une certaine longueur précise ; ce Problême est déterminé : Et supposé que $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$, on aura cette double expression, savoir pour le rectangle $ax + bx + xx$, & pour le quarré $bb + 2xb + xx$; lesquelles deux grandeurs suivant la supposition doivent être égales ; ainsi $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$, au moyen de laquelle on pourra connoitre la valeur de x, suivant qu'il sera enseigné.

CHA-

* L. 4. n. 29. † L. 3. n. 57.

CHAPITRE IV.

La connoissance des rapports qui sont entre les lignes de la figure d'un Problême, donne le moyen de les égaler ou de trouver de doubles expressions; ce qui s'appelle Equation. 14

SI on fait que trois lignes connues, a, b, c sont en proportion, & que x inconnue est le quatrieme terme de cette proportion; qu'ainsi $a . b :: c . x$*, alors puisque $\frac{bc}{a} = x$, on a cette double expression $\frac{bc}{a}$ & x de la même grandeur, & c'est ce qu'on appelle *Equation*. Trouver des Equations, c'est trouver de doubles expressions d'une grandeur inconnue; ce qui se peut, quand on connoit quelqu'un de ses rapports avec les grandeurs connues.

Si on fait que la somme de a & de b est égale 15
à l'inconnue x, cette expression $a + b = x$ sera une Equation. Il est évident que *la moitié de deux lignes inégales, moins la moitié de leur difference, est égale à la plus petite ligne; & cette même moitié, plus la moitié de leur difference, est égale à la plus grande ligne.*

Soit la ligne $AC = x + z$, $AD = x$, & $DC = Z$. Soit DE leur difference, dont BD est la moitié. Soit $AB = y$ & $DE = 2a$; ainsi DB ou $BE = a$. Il est clair que AB



* L. 3. n. 60.

$AB - DB$, ou $y - a = AD$ ou x, & que $BC + BD$ ou $y + a = DC$ ou z. Ainſi lorſqu'on connoit la difference de deux grandeurs inconnues, on a le moyen de les exprimer de deux manieres.

16 Quand il s'agit de Problêmes de Géometrie, les ſeules figures font ſouvent appercevoir le rapport des lignes, dont il eſt parlé par le Problême; car ſi par exemple je ſai que l'inconnue x eſt l'hypothenuſe d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtez ſont d & b, je ſai que $xx = bb + dd$*; ainſi voilà une double expreſſion de x. Un plan eſt fait de la multiplication de ſes deux racines; ſi on le diviſe donc par l'une, le quotient de la diviſion ſera l'autre. Ainſi ſi $b. c :: d. x$, puiſque $bx = cd$, diviſant cd par b, le quotient $\frac{cd}{b} = x$. Si x étoit moyenne proportionnelle entre c & d, alors $xx = cd$.

Les figures ou leurs proprietez, qu'on découvre aiſément quand on fait les élémens, & ces proprietez connues, donnent les moyens de trouver des Equations.

17 Ce qu'on a vu dans le troiſieme Livre touchant les Puiſſances, eſt auſſi une ſource de differentes Equations: car ſi je ſai que $a + b = x$, donc $aa + 2ab + bb = xx$ †. Si x eſt l'hypothenuſe d'un triangle, & que les deux côtez ſoient a & b, alors $aa + bb = xx$; partant $xx - aa = bb$, ou $xx - bb = aa$.

18 On peut exprimer differemment les mêmes grandeurs, marquant les parties pour le tout, ou le tout pour les parties; ou les puiſſances pour les racines, ou les racines pour les puiſ-
ſan-

* *L. 4. n. 79.* † *L. 3. n. 20.*

sances; car si $a + b = x$, donc * $aa + 2ab + bb = xx$; ou $aa + 2ab = xx - bb$, ou $aa + bb = xx - 2ab$. Il est évident qu'on peut trouver une infinité d'Equations en cette maniere:

Si $ab = xx$; donc $\sqrt{ab} = x$.

Ainsi en ajoutant, retranchant, multipliant, 19 divisant, on trouve le moyen d'égaler des grandeurs, d'en trouver de doubles expressions ou Equations, en quoi consiste principalement l'art de cette méthode que nous enseignons ici, & qui se nomme Analyse, c'est-à-dire, méthode de *résolution*, parce qu'on taille ou coupe, pour ainsi dire, la grandeur qu'on cherche: on lui ajoute, on lui retranche, on la multiplie, on la divise, on la résout, jusqu'à ce qu'elle se trouve précisément égale à une grandeur connue, après quoi elle n'est plus inconnue.

Chapitre V.

Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de lignes inconnues, & réduire toutes ces Equations à une seule. 20

Ce qu'on cherche dans une Question, dans un Problême, & généralement lorsqu'on veut connoitre ce qu'on ne connoit pas encore; c'est de ramener, pour ainsi dire, l'inconnu à ce qui est connu: comparer l'un avec l'autre, & remarquer leur difference, c'est-à-dire, ce qui fait que l'un est plus grand que l'autre; & qu'ainsi on découvre ce qu'il faut leur ajouter, ou en retrancher, pour les égaler; ce qu'on con-noit

* L. 3. n. 20.

noit aussi quand on sait précisément quelle est leur raison: car si x est le tiers de a, donc $x = \frac{a}{3}$. Si c'est a qui est le tiers de x, donc $3a = x$.

21 On peut de cette maniere trouver les doubles expressions de toutes les grandeurs, dont il est parlé dans le Problême, c'est-à-dire, trouver des Equations; & il en faut chercher autant qu'il y a de grandeurs inconnues. Il y a toujours dans un Problême une principale ligne inconnue, qui est celle dont dépend la résolution du Problême: & c'est à cette Equation qu'il faut réduire toutes les autres, de sorte qu'il n'y ait plus qu'une seule lettre inconnue; car si on sait que $x + b = z$, ou que $z - b = x$, partant où seront ces deux inconnues je pourrai toujours substituer $x + b$ en la place de z, ou $z - b$ en la place de x, & par conséquent réduire la Question à des termes où il n'y ait qu'une seule inconnue. Il y a differentes méthodes. Quand on connoit que l'inconnue est le troisiéme ou le quatriéme terme d'une proportion, on la peut exprimer avec les lettres des grandeurs connues; car si $\div a.b.x$; donc $\frac{bb}{a} = x$ *. Si $a.b :: c.x$; donc $\frac{bc}{a} = x$. Les termes d'une progression se peuvent exprimer de maniere, qu'on n'employe que la même lettre. Si j'avois cette progression de quatre termes exprimés par quatre differentes lettres $\div b.z.x.y$, je les pourrois réduire d'une maniere qu'il n'y eût qu'une lettre inconnue; car supposant que b est égal à 1, je pourrois dire que $\div 1.\ z.\ zz.\ zzz.$ 1°. † b ou 1 est à x, comme le quarré de b ou 1 est à celui de z; c'est-à-dire, $b.x :: bb.zz$, ou $1.x :: 1.zz$; ainsi puisque zz

* *L.* 3. *n.* 60. † *L.* 3. *n.* 70.

$zz = x$, je puis ſubſtituer zz à la place de x. De même b ou 1 eſt à y, comme bbb ou 1 eſt à zzz *. Donc puiſque $zzz = y$, au lieu de y je place zzz; ainſi je réduis ces quatre grandeurs b, z, x, y à celles-ci, 1, z, zz, zzz. Il y a une infinité de manieres ſemblables. Ce ſont des méthodes, chacun en peut trouver de plus heureuſes; ce qui lui donne lieu de réſoudre facilement des Problêmes, qui ſont très-difficiles à ceux qui ne connoiſſent pas la méthode; car tout le ſecret conſiſte à rendre les Equations nettes & ſimples.

CHAPITRE VI.

Il faut réduire les termes d'une Equation à l'expreſſion la plus ſimple, & faire enſorte que la grandeur inconnue ſe trouve ſeule dans l'un des membres de l'Equation. 22

LOrſqu'on a fait enſorte que la grandeur inconnue ſe trouve dans un des membres de l'Equation, c'eſt-à-dire, d'un côté du ſigne de l'égalité, & que de l'autre côté il n'y a que des grandeurs connues; la grandeur inconnue ſe trouve préciſément égale à des grandeurs connues, la Queſtion eſt entierement réſolue. Si $x = a + b$, l'on ne peut ignorer la valeur de x. Or pour arriver là, il faut faire paſſer d'un côté ce qui eſt connu, & le délivrer de ce qui eſt inconnu. Avant toutes choſes, on doit réduire les Equations à des expreſſions ſimples. Ces réductions ſe font par l'Addition, ou par la Souſtraction, ou par la Multiplication, ou par la Diviſion, ou enfin par l'Extraction des racines. Le

* L. 3. n. 87.

Le principe de tout cela, c'eſt qu'ajoutant aux deux membres d'une Equation, ou retranchant également, l'Equation où l'égalité demeure; comme auſſi multipliant ou diviſant ces deux membres par une même grandeur, ils demeurent égaux, comme on l'a prouvé *. Puiſque deux puiſſances égales ont des raiſons égales, il eſt clair qu'en prenant les racines de deux membres, leur égalité doit ſubſiſter.

23 On a fait voir l'utilité des réductions dans les Elémens de Mathématiques. Voyons-en ici quelques exemples. Si $x - 5 = 15$, ajoutant 5 de part & d'autre, viendra cette Equation plus ſimple $x = 20$. Si au contraire $x + 5 = 20$, en retranchant 5 de part & d'autre, on aura $x = 15$. Si $z - a = b - a$, ajoutant a de part & d'autre, vient $z = b$. De même, ſi $z + a = b + a$, retranchant a de part & d'autre, vient $z = b$. Si on a cette Equation $\frac{x}{3} = b$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, vient $z = 3b$. Comme au contraire, ſi on avoit $bx = 3b$, diviſant l'un & l'autre membre par b, on auroit $x = 3$. Si $xx = 25$, en prenant la racine quarrée, viendra $x = 5$. Au contraire, ſi on avoit $\sqrt{z} = 5$, c'eſt-à-dire, ſi la racine quarrée de z eſt égale à 5, en élevant ces deux membres à une même puiſſance, ou en prenant leur quarré, on a cette Equation $z = 25$. Si on avoit $xx = ab$, on pourroit mettre $x = \sqrt{ab}$.

24 Ce Théorême, que le quarré de l'hypothenuſe eſt égale aux quarrez des deux autres côtez, donne le moyen de réduire une Equation à une expreſſion plus ſimple: Car par exemple, ayant cette expreſſion $aa - bb$, & voulant trou-

* L. 3. n. 54. & 55.

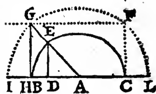
trouver un quarré égal à $aa - bb$, je n'ai qu'à prendre la moitié de a, & du milieu ou de cette moitié, comme rayon, faire un cercle; ou ayant pris une corde égale à b, menant de ſon extrêmité une ligne à l'autre extrêmité de a, qui eſt le diametre du cercle, j'ai un triangle rectangle dont a eſt l'hypothenuſe, & b un des côtez: je nomme c le troiſieme qui eſt connu; donc $aa = cc + bb$: ôtant bb de part & d'autre, vient $aa - bb = cc$; ainſi je puis mettre cc en la place de $aa - bb$, & par conſéquent avoir une expreſſion plus ſimple. Ainſi ſi j'avois $cc + bb$, joignant enſemble c & b de maniere que ces deux lignes fiſſent un angle droit, & achevant le triangle, le troiſieme côté ſeroit l'hypothenuſe contenue. Cette hypothenuſe ayant donc été nommée a, il eſt évident que $aa = cc + bb$. Au lieu de $cc + bb$, je puis donc ſubſtituer aa, expreſſion plus ſimple.

On peut trouver un quarré égal à un plan 25
donné; pour cela les deux côtez ou racines de ce plan étant b & d, il faut trouver un moyen proportionnel entre b & d*. Soit c moyen proportionnel; alors $bd = cc$ †. Ainſi je puis transformer le plan bd dans le quarré cc, c'eſt-à-dire, mettre l'un pour l'autre.

Un quarré étant donné, on peut trouver un 26
autre quarré qui en ſoit telle partie qu'on ſouhaitera, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou le cinquieme, &c. Soit le quarré aa, il en faut trouver un autre qui ſoit le quart de aa. Je prens une ligne au hazard, ſur laquelle je marque cinq parties égales avec la même ouverture du compas. Soit cette ligne BC, dont BD eſt une de ces cinq parties; ainſi DC vaut quatre de ces

* L. 4. n. 29. † L. 1. n. 57.

parties. De A milieu de BC, & de l'intervalle de AB ou AC je fais un cercle; & sur D j'éleve la perpendiculaire DE, qui se termine à la circonference de ce cercle. Alors $\div BD.\ DE.\ DC$ [a]. Si BD se nomme b, donc $DC = 4b$; & si $DE = x$, donc $\div b.\ x.\ 4b$; partant $xx = 4bb$.



Sur C j'éleve CF, une perpendiculaire égale à a racine, ou côté du quarré aa dont on cherche la quatrieme partie qui soit un quarré. Je mene FG une parallele à BC; & par le point G, où elle coupe le rayon AE prolongé à l'infini, j'abaisse une perpendiculaire sur BC prolongé de part & d'autre à l'infini. Cette perpendiculaire GH est égale à CF, & par conséquent à a [b]. Je fais un cercle de l'intervalle de AG, dont le diametre est IL; il est évident que IH est telle partie de IL que BD est de BC; par conséquent une cinquieme partie: ainsi si IH se nomme m, le reste du diametre HL sera $4m$. Or $\div IH.\ HG.\ HL$, ou $\div m.\ a.\ 4m$ [c]: donc $aa = 4mm$ [d]. La ligne IH sera par conséquent le côté ou racine d'un quarré, quatrieme partie du quarré a.

27 Ce seul exemple fait comprendre comme on peut trouver un quarré qui soit telle partie qu'il sera requis d'un quarré donné; ce qui est très utile pour réduire une Equation à une expression plus simple; car dans celle-ci $5bx + nn = 5xx$, en divisant ces deux membres par 5; & pour cela trouvant le quarré oo cinquieme partie de nn; je la réduirai à cette expression beaucoup plus simple $bx + oo = xx$. On voit ce qu'il faut faire.

Quand il est question de trouver un quarré plus

a L. 4. n. 29. b L. 1. n. 64. c L. 4. n. 29. d L. 3. n. 57.

plus grand, ou deux fois, ou trois fois, que celui qui eſt propoſé, on voit ce qu'il faut faire.

Il y a une infinité de moyens de réduire les expreſſions compoſées à de plus ſimples & plus nettes: après quoi il ne s'agit plus que de faire évanouïr d'une Equation certaines grandeurs embaraſſantes; ce qui ſe peut ajoutant cette Equation avec une autre, dans laquelle ſe trouvent ces mêmes grandeurs avec un ſigne contraire, ſelon ce principe, que plus & moins une grandeur, ce n'eſt rien. Ainſi, ſi $x = d - b$ & $z = d + b$; pour faire évanouïr b, j'ajoute ces deux Equations dans une Equation $x + z = 2d$, où b ne paroît plus. Il eſt facile de faire paſſer une grandeur d'un des membres d'une Equation dans l'autre membre; car dans celle-ci $x - b = d$; ajoutant b de part & d'autre, on aura $x = d + b$ où b ſe trouve dans le ſecond membre. 28

Quoiqu'on ne connoiſſe point les racines d'une Equation, c'eſt-à-dire, les grandeurs de la multiplication deſquelles une Equation eſt faite, on peut les augmenter ou les diminuer ſelon qu'on le juge à propos. Comme ſi $xx = xd + bb$ dont les racines ſont $x + d, b, x$, & qu'on veuille augmenter x de 3, il faut prendre la grandeur y qu'on ſuppoſe égale à $x + 3$. Ainſi $y - 3 = x$. Enſuite par-tout où ſera x mettre $y - 3$; & par-tout où ſe trouvera le quarré ou le cube &c. de x, faut mettre le quarré ou cube &c. de $y = 3$; après quoi l'Equation $xx = xd + bb$ ſera transformée en celle-ci, $yy - 6y + 9 = yd - 3d + bb$ qui eſt la même. En augmentant ou diminuant une Equation, il faut faire enſorte qu'il y ait des ſignes contraires; & qu'ainſi on puiſſe faire évanouïr les grandeurs dont on veut délivrer une Equation. On en verra des exemples. 29

CHAPITRE VII.

30 *Les Equations sont d'une ou de plusieurs dimensions ou degrez; & ce sont des degrez qui distinguent les Problêmes.*

SElon que la question est proposée, on fait monter les grandeurs inconnues à un degré plus élevé. Lorsque la grandeur inconnue à laquelle on a réduit les autres n'est point multipliée, comme en cette Equation $x = d + c$, on dit que cette Equation est simple ou d'une dimension. Nous avons vu que lorsqu'il y a plusieurs grandeurs inconnues, on les réduit toutes à une seule. Si par exemple on avoit x & z, & qu'on sût que leur difference fût b; si x étoit la plus petite, alors $z - b = x$; ainsi au lieu de z on peut mettre $x + b$. Par conséquent si, selon que la question est proposée, on savoit que le rectangle de x & de z, ou de x & de $x + b$, est égal au quarré de c, on auroit cette Equation $xx + xb = cc$, qu'on réduit en ôtant xb de part & d'autre, à celle-ci $xx = cc - xb$, où x est élevé au second degré. S'il y avoit eu trois grandeurs inconnues dans la question, & qu'elles eussent dû être multipliées les unes par les autres; x à laquelle on auroit réduit toutes les autres, seroit montée au troisieme degré. Ainsi on voit que les Equations sont d'une ou de plusieurs dimensions, ou de plusieurs degrez. Je ne parlerai pas davantage ici des Equations qui ont plus de deux degrez, parce qu'on ne les peut pas résoudre avec le compas & la règle, c'est-à-dire, en n'employant que le cercle & la ligne droite.

On

On réduit les Equations de deux dimenſions 31
à ces formules $xx = aa - xd$, ou $xx = aa + xd$, & $xx = xd - aa$. Car ſi $xx = ab - xd$, comme ab eſt une grandeur connue, en prenant $ab = cc$*, $xx = cc + xd$. Si $xx = xd + c$, je puis trouver un quarré bb égal à la grandeur c, ainſi que $xx = bb + xd$, je cherche une moyenne proportionnelle entre l'unité, & c, laquelle étant nommée b, il faut que $bb = 1\,c$, ou $bb = c$; puiſque une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande après cette multiplication, comme on l'a déja dit.

C'eſt une faute conſiderable en cette matiere, 32
de ne pas réduire à un degré inferieur ce qui y peut être réduit. On fait cette faute, lorſqu'entre les grandeurs inconnues d'une queſtion, on ne cherche pas des Equations qui conduiſent à un degré plus ſimple.

C'eſt pour réſoudre quelque Problême qu'on cherche des Equations, & qu'on tâche de les réduire. La nature de l'Equation donne le nom au Problême qu'elle réſout.

Quand dans la réſolution, l'Equation après avoir été réduite, n'a qu'une dimenſion, comme ſi $x = b$ ou $x = \frac{ab}{c}$, cette Equation eſt du premier degré, & le Problême eſt ſimple.

Lorſqu'on trouve une Equation où l'inconnue a deux dimenſions, comme $xx = aa + bb$ qui eſt une Equation du ſecond degré, le Problême eſt nommé *Plan*.

Lorſque l'on trouve une Equation élevée au 33
troiſieme ou quatrieme degré, comme $x^3 = aab$ ou $x^4 = acb$, qui ſont des Equations du troiſie-

* *sup.* n. 25.

me ou du quatrieme degré, le Problême est nommé *Solide*.

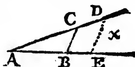
Lorsqu'on vient à une Equation où l'inconnue est élevée au delà du quatrieme degré, le Problême étoit nommé *Linéaire* par les Anciens; mais il est plus naturel de le nommer par le degré auquel l'inconnue est élevée.

CHAPITRE VIII.

34 *De la Construction & Effection géometrique des Equations, c'est-à-dire, de la maniere d'exprimer avec des Lignes les Quantitez qui s'y rencontrent.*

On appelle Construction ou Effection géometrique d'une Equation, les expressions qu'on fait en lignes des grandeurs connues & inconnues d'une Equation. La construction des Equations d'un degré est facile, puisqu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à une grandeur connue. Comme si $x = a$, que a soit d'un pied, il est facile avec la règle & le compas de tirer une ligne d'un pied. Quand le membre connu d'une Equation auroit plusieurs grandeurs, comme $a = a + b$, la chose seroit aisée; car on peut réduire l'Equation à une expression plus simple, prenant une grandeur égale à ces deux grandeurs. On peut prendre deux differentes lignes, & les joindre. Quelquefois on ne cherche pas la valeur d'une grandeur, mais celle de son quotient, divisée par d'autres grandeurs; par exemple $x = \frac{ab}{c}$: pour exprimer cela géometriquement, c'est-à-dire, construire ou faire une figure qui exprime cette Equation, il faut remarquer que ces lettres marquent des grandeurs pro-

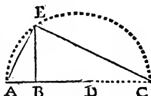
proportionnelles entre elles ; car si $c . a :: b . x$, la seconde a étant multipliée par la troisieme b, & leur produit ab divisé par c la premiere, le quotient de la division $\frac{ab}{c}$ sera x la quatrieme proportionnelle ; ainsi $x = \frac{ab}{c}$. Pour exprimer cela géometriquement, ayant pris AB égale à c, & AE égal à b, sur B j'éleve BC que je fais égale à a ; & de A par C je mene une ligne ; ensuite sur E j'éleve une parallele à BC ou à a, que je nomme x. Ces quatre lignes $AB . BC :: AE . x$. sont proportionnelles ; ainsi $\frac{BC \times AE}{AB}$, ou $\frac{ab}{c} = x$.



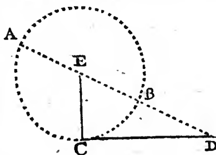
De même pour exprimer géometriquement $\frac{aa + ab}{c + d} = x$, comme ces grandeurs connues se peuvent réduire à cette proportion $c + d . a + b :: a \frac{aa + ab}{c + d}$ ou x, la même figure exprime cette Equation ; trois lignes étant données on trouve une quatrieme proportionnelle, qui est la valeur de x. 35

Lorsque les grandeurs connues d'une Equation ont un signe radical, on peut de même l'exprimer géometriquement. Si par exemple, *fig. suiv.* $x = \sqrt{ab}$, en tirant AB une ligne égale à a, & la prolongeant jusques à C, de sorte que $BC = b$, & du milieu de AC comme centre faisant un cercle, la perpendiculaire BE sera la valeur de x ; car $\div AB . BE . BC$, ou $\div a . x . c$; ainsi $ab = xx$: donc $ab = x$. 36

37 On peut aussi faire la construction de cette Equation $x = \frac{bb}{a-b}$, & l'exprimer en cette maniere. AD étant pris égal à a, & AB à $a-b$; ainsi BD étant égal à b, j'éleve sur B une perpendiculaire égale à BD ou b, je mene de A à E une ligne droite; & sur AE au point E une perpendiculaire, savoir EC, qui coupe le prolongement de AD: Alors l'angle CEA est droit; ainsi ayant décrit un cercle par les trois points A, E, C, il est évident que $\div AB . BE . BC$, ou que $\div a-b . b . x$, j'appelle x la valeur de BC. Donc bb. divisé par $a-b$ est égal à x *; ainsi $\frac{bb}{a-b} = x$.



38 La construction des Equations de deux degrez, est pareillement facile. Les Equations de deux degrez ou de deux dimensions se réduisent, comme nous l'avons vu, à ces formules, $xx = ax + bb$, ou $xx = ax - bb$, ou $xx = bb - ax$.



1°. Pour faire la construction de $xx = ax + bb$, ou $xx = bb - ax$; sur CD une ligne droite, que je suppose égale à b, j'éleve CE une perpendiculaire que je suppose égale à la moitié de a, & de l'intervalle de cette moitié, comme rayon, je fais un cercle, & je mene par E son centre la ligne DE

* L. 3. n. 60.

DE. Puisque CE est la moitié de a, donc $AB = a$. Soit $BD = y$, & $AD = x$. donc $a + y = x$; donc[a] $ax + xy = xx$. Or puisque CD ou b est une tangente, donc[b] $\div x.b.y$; donc[c] $xy = bb$. Ainsi dans cette Equation $xx = ax + xy$: substituant bb en la place de xy, qui est la même chose, on aura cette Equation $xx = ax + bb$ dont on a fait ainsi la construction.

2°. Pour faire la construction de cette Equation $xx = bb - xa$, on fait la même chose. On suppose CD (*même figure*) égale à b, & CE égale à la moitié de a; mais on suppose que BD est égale à x. Alors $\div AD$ ou $a + x$. CD ou b. BD ou x: donc $ax + xx = bb$. En ôtant de part & d'autre ax, viendra $xx = bb - ax$, qui est l'Equation dont il falloit former la construction. 39

3°. La construction de cette Equation $xx = ax - bb$, se fait ainsi. Soit AB égale à a, de l'intervalle BC moitié de AB je fais un cercle; j'éleve sur B la perpendiculaire BD égale à b; je mene par D la ligne DG parallele à AB. Si cette parallele ne coupe pas le cercle, parce que b est égale ou plus grande que le rayon du cercle égal à la moitié de a, c'est une preuve que xx n'est pas égal à $xx - bb$, puisque b est trop grand au regard de x. Soit donc b plus petit que BC, ainsi DG coupe le cercle en E, par conséquent EF que je suppose perpendiculaire, est égale à BD[d]. Je nomme x la ligne AF, & y la ligne FB. Il est évident[e] que $\div AF$. ou x. FE ou b. FB ou y. 40

 Ainsi

a *L.* 3. *n.* 18. b *L.* 4. *n.* 33. c *L.* 3. *n.* 57.
d *L.* 1. *n.* 65. e *L.* 4. *n.* 29.

Ainsi $\div x.b.y$: donc[a] $xy = bb$. Or on a supposé AF ou x, plus FB ou y égal à a; donc $x + y = a$. En multipliant cette Equation par x, on a cette Equation $xx + xy = ax$: plaçant bb en la place de xy qui est la même chose, comme on vient de voir, on a $xx + bb = ax$; & retranchant bb de part & d'autre, on aura $xx = ax - bb$. Ainsi on a fait la construction de cette Equation.

41 Par le moyen de cette construction on trouve en ligne la valeur de la grandeur inconnue; ce qui se trouve encore plus facilement en réduisant dans une progression de trois termes, les trois formules précédentes. 1°. Cette Equation $xx = ax + bb$ se réduit à cette progression $\div x - a.b.x$; car $xx - ax = bb$[b]: ajoutant ax de part & d'autre, on a l'Equation dont il s'agit, $xx = ax + bb$.

42 2°. Cette Equation $xx = ax - bb$ se réduit à cette progression $\div x.\ b.\ a - x$. Car $ax - xx = bb$[c], ajoutant xx de part & d'autre, on a $ax = bb + xx$; ôtant bb de part & d'autre, on a $ax - bb = xx$, qui est l'Equation dont il est question.

43 3°. Cette Equation $xx = bb - ax$, se réduit à cette progression $\div x + a.b.x$; car $xx + ax = bb$[d]: ôtant de part & d'autre ax, on a cette Equation $xx = bb - ax$ dont il s'agissoit.

Dans ces trois progressions, b le terme moyen est connu; & dans la premiere & dans la troisieme, on connoit la difference des extrêmes qui est dans la premiere $-a$, & dans la troisieme $+a$. Dans la seconde, on connoit la somme des deux extrêmes. Avec cela, comme on le va voir dans les trois Problêmes suivans, on peut connoitre tous les termes de ces progressions.

PRO-

a *L.* 3. *n.* 57. b *L.* 3. *n.* 58. c *L.* 3. *n.* 57. d *L.* 3. *n.* 57.

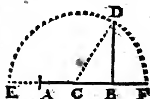
PROBLEME I.

Soit cette progression de trois lignes $\div$ z. b. x. *On connoit la moyenne* b, *& que* a *est égal à la somme de* x *& de* z *les extrêmes. Connoitre les extrêmes.* 44

Je prens AB égal à a, somme des extrêmes. De C, milieu de AB comme centre, & de l'intervalle AC ou CB, je fais un cercle. Sur B j'éleve perpendiculairement BD égale à la moyenne b; & par le sommet D je mene DG (*même figure que ci-dessus*) parallele à AB, & de E où DG coupe le cercle, j'abaisse FE une perpendiculaire sur AB, qui est égale à BD, ainsi $EF = b$; donc puisque $\div AF. EF. FB.$ les extrêmes seront AF & FB; ainsi si z est le grand extrême, FB qui est le petit extrême, sera égal à x.

PROBLEME II.

Soit cette progression de trois lignes $\div$ x + d. b. x, *ou* $\div$ x − d. b. x, *la moyenne* b *est connue, & la difference des extrêmes* x + d *&* x. *Connoitre la valeur de* x. 45



Je fais AB égale à d; & sur B j'éleve perpendiculairement BD égale à b; ensuite de C moitié de AB, & de l'intervalle CD, je fais un cercle. Je prolonge AB de part & d'autre jusqu'à la circonference du cercle, après quoi AE ou $BF = x$, car $\div x + d. b. x$.

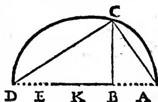
Si la progression est $\div x - d. b. x$, il faut faire la même chose, mais en ce cas où $x = EB$, le plus petit terme est BF égal à $EB - AB$,

ou à $x - d$. Il est évident que la difference de $x - d$. & de x est d. Quand le signe est $+$, la grandeur x est EA, à laquelle on ajoute la difference d, pour avoir le plus grand extrême. Quand le signe est $-$, on retranche d de EB ou FA qui est la valeur de x.

PROBLEME III.

46 *Soit cette progression de trois lignes* $\div$ d $+$ x. b. d, *la moyenne* b *étant connue, connoître la difference des extrêmes* d $+$ x *&* d, *laquelle est* x.

Sur B extrêmité de AB égale à d, j'éleve perpendiculairement BC égale à b; par A & C je mene une ligne droite sur laquelle au point C je fais une perpendiculaire qui est CD; ainsi l'angle ACD est droit. Je prolonge AB jusqu'à ce qu'elle coupe CD; la ligne BD, après en avoir ôté AB, sera égale à x; car ayant coupé AD par la moitié au point K, & de l'intervalle AK ou KD fait un cercle, ce cercle passera par C; ainsi $\div AB$ ou d. BC ou b. BD: partant $BD = d + x$ qui est le troisieme terme, ayant donc retranché de BD la ligne DE égale à AB, le reste sera égal x dont on cherchoit la valeur.



CHA-

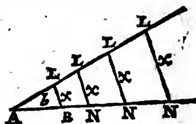
CHAPITRE IX.

De la Construction ou Effection géometrique, qui est un Lieu. Qu'est-ce que ce Lieu? Quand est-ce qu'un Problême est un Lieu? Distinction des Problêmes selon cette consideration. 47

DAns les Constructions ou Effections géometriques des Equations on cherche ordinairement une ligne droite ou courbe, ou une superficie, dont tous les points ayent un même rapport aux points d'une même ligne droite à l'égard de l'un de ses points. Une ligne droite, une ligne courbe, une superficie, ne sont pas distinguées des points, par lesquels elles passent; ainsi par un Lieu géometrique il faut entendre le passage, ou les points, par lesquels passe la grandeur qu'on cherche. Une Construction ou Effection géometrique est donc un Lieu, si ce n'est pas seulement un point qu'on propose de trouver, mais une suite de plusieurs points, qui comparez avec un certain point & une certaine ligne droite, ayent entre eux les mêmes rapports. Et alors l'Equation, qui exprime ces rapports, s'appelle un Lieu; & le Problême qu'on entreprend de résoudre, est aussi un Lieu. Il y a plusieurs sortes de lignes; il y a aussi plusieurs sortes de lieux, des cercles, des lignes droites & courbes de differentes especes. On dit ainsi d'un Problême, qui est un Lieu, que c'est ou à la ligne droite, ou au cercle, ou à quelque espece de ligne courbe.

48 Les Problêmes, qui sont indeterminez, sont des Lieux; car ils peuvent avoir plusieurs diffe-

rentes résolutions. Voyons-en des exemples; & comme toutes les résolutions s'expriment par une seule Equation, commençons par un lieu qui soit une ligne. La ligne LL en sera un, si l'on peut mener de tous les points les lignes LN, LN, paralleles, qui rencontrent une ligne droite AN; & ayant pris sur la ligne AN un point A à volonté, chaque ligne LN a un même rapport à la partie AN, qu'elle fait par sa rencontre. Par exemple, si la ligne LL est droite, & qu'elle rencontre la ligne droite AN en A, il est évident que chaque ligne droite LN a un même rapport à chaque partie AN; ce qui se peut exprimer par cette Equation $y = \frac{bx}{a}$. si je suppose que le rapport proposé est comme de a à b, & que les lignes indéterminées soient $LL = x$, & $NN = y$: car puisque $a. b :: x. y$; donc le produit de b par x, qui est bx divisé par a, sera la valeur de y; ainsi $y = \frac{bx}{x}$. Cette Equation marque que ce lieu est une ligne; car il n'y a qu'elle qui ait cette proprieté, que toutes les lignes qu'on tirera de AL sur AN, feront toutes à AN comme a est à b; ainsi vous voyez que le Problême où il s'agit de trouver LL, est un lieu; qu'ainsi ce Problême est indéterminé, étant capable de differentes résolutions; & ce lieu ne peut être qu'une ligne droite: car il n'y a que celle dont LL occupe la place, qui ait les proprietez de la ligne droite.



Un

Un Problême eſt un lieu à un cercle, & il eſt indéterminé, quand on propoſe de trouver une ligne dont le quarré ſoit égal à un plan ; car alors il faut de néceſſité ſuppoſer des grandeurs connues, comme par exemple, que les côtez du plan ſont a & b ; que $AB = a$, & $BD = b$. $AD = a + b$, & $AC = CD$. 49

Sur C comme centre je fais un cercle, & ſur B la perpendiculaire BE, alors $\div\!\div AB.$ $BE.\ BD$; donc $ab = \overline{BE}^2$; ainſi ſi $BE = x$, donc $ab = xx$ ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problême eſt indéterminé : car quelque raiſon que je ſuppoſe entre les parties de AD, le quarré de la ligne qui tombera perpendiculairement entre les deux points A & D, aura toujours ſon quarré égal au plan des parties de AD, c'eſt-à-dire, que $ab = xx$, ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problême peut donc avoir une infinité de réſolutions. Vous voyez que pour trouver une Equation, il a fallu ſuppoſer des lignes connues AB & BD, autrement on ne l'auroit pu finir.

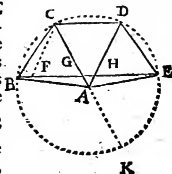
Il n'y a que le cercle, qui dans toutes ſes parties ait toujours cette Equation.

C'eſt ainſi que par les Equations on connoit la nature de toute ligne droite & courbe, pourvu qu'elle ſe puiſſe faire par un mouvement régulier & uniforme. C'eſt à connoitre la nature des lignes courbes, que ſert la doctrine des lieux; ainſi c'eſt une matiere qui ne nous regarde pas.

Chapitre X.

50 *On ne peut exprimer géometriquement avec la règle & le compas, que les Equations simples, ou qui ne sont que de deux degrez ; on ne peut donc pas avec la connoissance de ces Elémens, résoudre les Problêmes solides.*

On vient de voir comment on peut résoudre avec le compas & la règle, c'est-à-dire, en tirant des lignes droites & faisant des cercles, les Equations qui sont d'un ou de deux degrez. Cela ne se peut pas, quand elles en ont davantage. Voyons-le dans un exemple. Le Problême de la trisection de l'angle est fameux. Un arc de cercle étant donné, on propose de le couper en trois parties égales, & par conséquent trouver une troisieme partie de l'angle proposé, dont la troisieme portion de cet arc soit la mesure. La corde BE de l'arc $BCDE$ est connue. On propose de couper cet arc en trois parties égales. Selon les règles de la méthode, je suppose la chose faite, c'est-à-dire, que $BC = CD = DE$; je mene CF parallele à DH ; ainsi $CF = DH$: & puisque $CG = DH$, partant $CF = CG$; ainsi le triangle FCG est un isoscele. Les angles BCG & BGC sont égaux ; car la mesure de BCG est la moitié de l'arc BK, & celle de BGC est la moi-



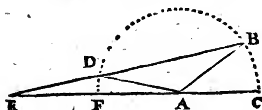
moitié de KE, plus la moitié de BC ou de DE égal à BC[a]. Or BK est égal à KD; donc ces deux angles qui ont même mesure sont égaux: partant le triangle CBG est isoscele. Il a un angle commun avec FCG; ces deux isosceles sont donc semblables. BAC est aussi isoscele, & il a un angle commun avec CBG, savoir BCG; ces trois triangles sont donc semblables[b].

Ces trois triangles BAC, CBG, FCG étant semblables, il faut que $\div\div AB.\ BC.\ CG.\ GF$[c], donc si $AB = 1$ & $BC = z$, selon ce qui a été dit ci-dessus[d], $\div\div 1.\ z.\ zz.\ zzz$; donc $FG = zzz$. Je nomme b la ligne connue BE; or $CD = FH = BC = BG = HE$; donc $BG + FG + GH + HE$ est le triple de BC; ainsi il ne s'en faut que la valeur de FG que BE, ou b ne soit triple de BC. Or $FG = zzz$, donc $b + zzz = 3z$, ou $zzz = 3z - b$.

Voilà jusqu'où nous pouvons pousser ici ce Problême, mais vous voyez que nous n'avons rien dans les Elémens précédens dont on puisse tirer un moyen pour connoitre la grandeur inconnue z, sachant seulement que son cube zzz est égal à trois fois elle-même, c'est-à-dire, à $3z$, après en avoir retranché la grandeur connue b.

Ce Problême se résout aisément par des 51
voyes méchaniques. Soit l'arc BC, mesure de l'angle BAC, qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers E le diametre CF, & appliquant une règle sur B, & sur le prolongement de CF, je cherche le point D dans le cercle tel que la ligne AD soit égale à DE; l'ayant trouvé en tâ-

a *L.* 2. *n.* 39. & 52. b *L.* 2. *n.* 83. & *L.* 4. *n.* 8.
c *L.* 4. *n.* 10. d *sup. n.* 21.



tâtonnant, je dis que l'arc *DF* sera le tiers de *BC*, ou que *DAF* est le tiers de *BAC*; ce que je démontre.

ADE & *DAB* sont isosceles: donc *DBA* = *BDA*, & *DAE* = *DEA*: l'angle *BDA* exterieur, est égal aux deux interieurs *DEA* & *DAE*; donc *DBA* est égal à ces deux mêmes angles, & par conséquent il est double de l'un & de l'autre. L'angle *BAC* exterieur est aussi égal aux deux interieurs *DEA* (ou son égal *DAF*) & à *DBA*, partant il est triple de *DAF* moitié de *DBA*; ce qu'il falloit démontrer.

J'aurois pu ajouter plusieurs choses touchant les Equations; mais ce que j'ai dit suffit, car pour faire usage de ce qu'on en peut dire de plus, il faut avoir étudié les Elémens des lignes courbes.

CHAPITRE XI.

52. *Essais de la méthode sur quelques Problêmes.*

On peut tenter la résolution d'un Problême par deux voyes. La premiere n'est qu'une application des Elémens, qui font découvrir quelque moyen particulier au Problême dont il s'agit, & qui ne peut pas servir dans un

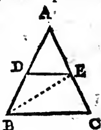
un autre. La seconde voye est l'ordre que prescrit la méthode que nous enseignons ici, selon laquelle on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend généralement à tout Problême. Donnons un exemple de ces deux voyes.

PROBLEME I.

BAC est un isoscele. On propose de couper 53
ses côtez *AB*, *AC* par une parallele à la base *BC*; de sorte que cette parallele soit égale à ce qui reste des côtez, c'est-à-dire, (je suppose la chose faite) que $DB = DE$.

Premiere maniere.

Je suppose la chose faite, savoir que $BD = DE$, donc le triangle *BDE* est isoscele; ainsi les angles *DBE*, & *DEB* sont égaux. Or les angles *CBE* & *EBD* sont aussi égaux*: partant *EBC* & *EBD* sont égaux; partant la ligne *B E* coupe par la moitié l'angle *DBC*. D'où je connois que dans un triangle isoscele, tel que *BAC*, en divisant en deux l'angle *ABC* par une ligne droite *BE*, & menant par *E* une parallele à *BC*, elle sera égale à *DB*; ainsi par cette proprieté du triangle isoscele je trouve le moyen de résoudre le Problême proposé; mais, comme vous voyez, ce moyen est particulier & propre à ce seul Problême.



Seconde maniere.

Supposant la chose faite, je nomme *a* la ligne 54
AB qui est connue, & *d* la base *BC* aussi connue, & *x* la grandeur inconnue *AE* que l'on cherche; ainsi

* *L. 2. n. 25.*

ainsi comme $EC = a - x$, aussi $DE = a - x$, il est évident que $a. d :: x. a - x$, donc $aa - ax = dx$. J'ajoute de part & d'autre ax, & il vient $aa = dx + ax$; je suppose $c = d + a$, ainsi $cx = dx + ax$; & par conséquent au-lieu de $dx + ax$, mettant cx, j'ai $aa = cx$; donc $\div c. a. x$: ainsi il ne s'agit que de trouver une troisieme proportionnelle aux deux lignes connues c & a; ce qu'on a enseigné *. Cette seconde maniere analytique est générale, & n'est point particuliere à ce Problême.

PROBLEME II.

55 *Connoitre chaque côté du triangle* ABC, *connoissant la somme de chacun de deux de ses côtez.*

Soit $AB = x$, & $AB + BC = a$, & $AB + AC = b$, & $BC + AC = c$; alors $BC = a - x$, & $AC = b - x$. Or $AC + BC = c$; donc $a - x + b - x$, ou $a + b - 2x = c$. Donc ajoutant $2x$ de part & d'autre, on aura $a + b = c + 2x$. Otant c de part & d'autre, on aura $a + b - c = 2x$.

Ainsi pour trouver la valeur de x, il faut joindre les deux lignes a & b, retrancher du tout la ligne c; la moitié de ce qui reste sera la valeur de x.

PROBLEME III.

56 a *est un des côtez d'un triangle rectangle*, x *est l'autre côté, dont la difference avec l'hypothenuse est* b. *Trouver la valeur de* b.

L'hypothenuse est $x + b$; Donc $aa + xx = x + 2bx + bb$ †. Otant xx de part & d'autre; $aa = 2bx + bb$; retranchant encore bb, on aura $aa - bb = 2bx$; prenant $cc = aa - bb$ ‡, on au-

* L. 4. n. 23. † L. 4. n. 71. ‡ sup. n. 24.

aura $cc = 2bx$. Donc $\div 2b.\, c.\, x$. Il ne s'agit donc que de trouver une troisieme proportionnelle aux deux grandeurs connues $2b$ & c.

PROBLEME IV.

57 a *est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, &* b *la difference des deux côtez. Trouver ces côtez.*

Soit nommé x le plus petit côté : donc le plus grand est $x + b$: ainsi $aa = 2xx + 2xb + bb$. Je retranche bb = de part & d'autre, & j'ai $aa - bb = 2xx + 2xb$, ou $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = xx + xb$. Je mets en la place de $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, le quarré cc que je lui trouve égal [a]. J'ai donc $cc = xx + bx$, ou $cc - bx = xx$; ainsi $\div x + b.\, c.\, x$. On trouvera donc la valeur de x [b].

PROBLEME V.

58 a *est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, &* b *la somme des deux côtez. Trouver ces côtez.*

Soit nommé x un de ces côtez ; donc l'autre sera $b - x$: ainsi $aa = bb - 2bx + 2xx$. J'ajoute $2bx$, ainsi $2bx + aa = bb + 2xx$. Je retranche encore bb, & j'ai $2bx + aa - bb = 2xx$. Je mets dd en la place de $aa - bb$, que j'ai trouvé égal [c] : donc $2bx + dd = 2xx$. Je divise le tout par 2, pour cela je cherche cc égal à la moitié de dd [d] ; ainsi $bx + cc = xx$: donc $\div x.\, c.\, x - b$. Je puis donc trouver la valeur de x [e].

PROBLEME VI.

59 aa *est l'aire ou superficie d'un parallelogramme rectangle,* x *son petit côté, &* $x + b$ *le plus grand. On cherche ces deux côtez.*

Le produit de x par $x + b$ est l'aire de ce pa-

a *sup. n.* 24. b *sup. n.* 38. & 43. c *sup. n.* 24.
d *sup. n.* 26. e *sup. n.* 38. & 4.

parallelogramme; donc $xx + xb = aa$; ainsi $\div x. a. x + b$. Ce Problême se résout par conséquent comme le précédent.

PROBLEME VII.

60 x *est le plus grand côté d'un triangle rectangle : sa difference avec l'hypothenuse est* a, *qui est ainsi* x + a. *La difference de cette hypothenuse avec l'autre côté, qui est plus petite qu'elle, est* b; *ainsi ce côté est* x + a − b. *On cherche ces trois côtez.*

Les quarrez des deux côtez x & $x + a - b$ sont égaux à celui de l'hypothenuse, laquelle est $x + a$; ainsi $2xx + 2ax - 2bx - 2ba + aa + bb = xx + 2ax + aa$. J'ajoute de part & d'autre $2ba$, & j'ai $2xx + 2ax - 2bx + aa + bb = xx + 2ax + aa + 2ba$. Je retranche de part & d'autre $xx + 2ax + aa$; & j'ai $xx - 2bx + bb = 2ba$. Je retranche $+ bb$, & j'ai $xx - 2bx = 2ba - bb$: prenant d égal à $2b$ & cc égal à $2ba - bb$, j'ai $xx - dx = cc$; ainsi $\div x. c. x - d$. Ce qui se résout aisément *.

PROBLEME VIII.

61 b *est la perpendiculaire tirée de l'angle droit sur l'hypothenuse d'un triangle rectangle :* a *est la difference des deux parties ou segmens de l'hypothenuse. Trouver ces segmens.*

Soit x le plus petit segment; donc le plus grand sera $x + a$. Or $\div x + a. b. x$ †. Donc ce Problême se résout comme on l'a enseigné ‡.

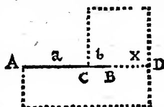
PROBLEME IX.

62 *La ligne* AB *est coupée dans un de ses points,* C; *on propose de la prolonger jusqu'à* D,

* *sup. n.* 38. & 41. † *L.* 4. *n.* 28. ‡ *sup. n.* 38. & 43.

D, *de sorte que le rectangle fait de* AD *&* *de* BD *soit égal au quarré de* CD.

Je suppose la chose faite. Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$. Il est question de trouver la valeur de BD, ou de x. Je multiplie AD ou $a + b + x$ par BD, c'est-à-dire, par x, ce qui fait $ax + bx + xx$, lequel produit selon la question est égal au produit de CD ou de $b + x$ multiplié par lui-même; c'est-à-dire, que $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$. J'ôte des deux membres de cette Equation $bx + xx$, & il reste $ax = bb + bx$; je fais passer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connue bb reste toute seule, & j'ai $ax - bx = bb$. Pour réduire cette Equation aux plus simples termes, je la divise par $a - b$, & alors $x = \frac{bb}{a-b}$ laquelle Equation se résout dans cette progression $\div a - b. b. x$, dont les deux premiers termes étant connus, le troisieme que je cherchois, qui est x, me sera aussi connu; ainsi pour faire le Probléme il faut prolonger la ligne AB de la grandeur x qu'on vient de connoitre.



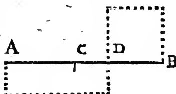
La résolution de chaque Problême, donne la connoissance d'un nouveau Théorême: Car selon ce qui vient d'être prouvé, le quarré de BD, *prolongement d'une ligne, plus* CB *partie de cette ligne, est égal au rectangle fait de* AD *&* *de* BD; *& ce prolongement est le troisieme terme d'une progression, dont* AC — BC *est le premier terme, &* BC *le second. La plus grande par-*

partie des Théorêmes sont les fruits de l'Analyse, qui, comme vous voyez, est une source féconde de véritez.

PROBLEME X.

63 *La ligne* AB *est coupée en* C. *On propose de la couper derechef en* D; *de sorte que le rectangle de* AC+DC *par* CD, *soit égal au quarré de* DB.

Je suppose la chose faite. Il faut trouver la valeur de CD. Soit $AC=a$, & $CB=b$, & $CD=x$; ainsi $DB=b-x$. Le rectangle de AD par CD est $ax+xx$, & le quarré de DB est $bb-2bx+xx$; donc selon la question $ax+xx=bb-2bx+xx$. Je retranche xx de part & d'autre, & $ax=bb-2bx$. Je fais passer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu soit seul, $ax+2bx=bb$; je divise cette Equation par $a+2b$, il vient $x=\frac{bb}{a+2b}$; je réduis cette égalité en proportion $\div a+2b.\ b.\ x$, les deux premiers termes sont connus, donc x le sera aussi; ainsi en prenant sur CB la ligne CD égale à x, on aura fait ce qui étoit requis.

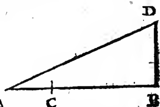


PROBLEME XI.

64 *La ligne droite* AB *est coupée en* C, *la ligne* BD *infinie est perpendiculaire sur* AB: *il faut de* A *mener* AD *une ligne sur* BD, *de sorte que* AD=BC+BD.

Je suppose la chose faite, & que $AB=a$ & $BC=b$, & $BD=x$ valeur que l'on cherche. Se-

Selon la queſtion $AD = BC + BD$, partant $AD = b + x$. Or puiſque l'angle ABD eſt droit, le quarré de AD ou de $b + x$, lequel quarré eſt $bb + 2bx + xx$, eſt égal à ceux de AB, & de BD, qui ſont aa & xx. Ainſi $bb + 2bx + xx = aa + xx$; ôtant de part & d'autre xx, il vient $bb + 2bx = aa$. Afin que l'inconnu ſoit tout d'un côté, faiſant changer de place à bb, nous aurons $2bx = aa - bb$, que je diviſe par $2b$, & j'ai $x = \frac{aa - bb}{2b}$, laquelle Equation ſe réduit ainſi dans cette proportion $2b.\ a + b :: a - b.\ x$, dont les trois premiers termes étans connus, le quatrieme x ſera connu: ce que l'on cherchoit.



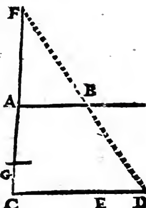
PROBLEME XII.

65 *Deux lignes paralleles* AB *&* CD, *ſont données par poſition avec* CF, *comme auſſi les points* F *&* E. *On propoſe de mener* FD *coupant* AB *&* CD *prolongées au beſoin, de ſorte que* AB *ſoit à* ED, *comme* AF *eſt à* AG.

Soit $AF = a$, $CF = b$, $CE = c$, $AG = d$, & $AB = x$.

Nous ſuppoſons la choſe faite: partant, ſelon l'hypotheſe $a.\ d :: x.\ ED$. Multipliant donc x par d, & diviſant le produit qui eſt dx par a, le quotient $\frac{dx}{a} = ED$. Les deux triangles AFB & FCD ſont ſemblables; $a.\ x :: b.\ CD$. Or $CD = CE + ED$, & partant $CD = c + \frac{dx}{a}$. Le produit des extrê-

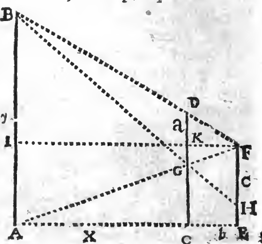
mes a & $c + \frac{dx}{a}$, qui eſt $ac + dx$, eſt égal à celui des moyens: Donc $ac + dx = bx$. Je tranſporte $+ dx$, & vient $ac = bx - dx$. Je diviſe cette Equation par $b - d$, & j'ai $x = \frac{ac}{b-d}$ laquelle Equation ſe réduit en cette proportion $b - d. c :: a. x$, dont les trois premiers termes ſont connus.



PROBLEME XIII.

56 *Meſurer une hauteur inacceſſible* AB, *& ſa diſtance* AC, *par le moyen de deux bâtons* CD *&* EF.

Je ſuppoſe que $AC = x$, $AB = y$, $CE = b$, $GD = a$, & $FH = c$; alors puiſque les triangles BAF & GDF ſont ſemblables, $AB. GD :: FA. FG$; mais $FA. FG :: FI. FK$, à cauſe des paralleles GD, BA; donc $AB. GD :: FI. FK$, ou leurs égales AE & CE, ainſi $y. a :: x + b. b$, par conſéquent $y = ax + ab$.



Les

Les deux triangles BHF & BGD font semblables; donc comme BD est à BF, ou IK à IF, ou AC à AE, de même GD est à HF; ainsi $AC. AE :: GD\ FH$, ou $x. x+b :: a. c$, partant $xc = ax + ab$; ôtant ax de part & d'autre, il reste $xc - ax = ab$; divisant l'un & l'autre membre par $c - a$, on a $x = \frac{ab}{c-a}$; ainsi $c - a\, a :: b. x$. On connoit les trois premiers termes de cette proportion; donc x le quatrieme que l'on cherche sera aussi connu.

Puisque l'on a trouvé ci-dessus que $by = ax + ab$ & $xc = ax + ab$; il s'ensuit que $by = cx$, étant égaux à la même grandeur $ax + ab$, partant $b. c :: x. y$. Or x est déja connu: donc les trois premiers termes étant connus, on connoîtra le quatrieme terme y que l'on cherchoit.

PROBLEME XIV.

Deux Marchands ont mis en Société 12 *livres, & ont gagné* 34 *livres; le premier a pris* 7 *livres, tant pour mise que pour gain pour deux mois; le second a pris* 39 *livres, tant pour sa mise que pour son gain pour cinq mois. On demande la mise & le gain d'un chacun en particulier.* 67

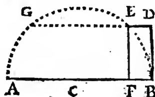
La mise des deux, $12 = a$. La mise du premier soit x; ainsi celle du second est $a - x$.

La mise & gain du premier est $7 = b$: donc $b - x$ sera le gain du premier.

La mise & gain du second est $39 = c$: donc $c - a + x$ sera le gain du second.

Or comme la mise du premier multipliée par son tems, est à son gain; ainsi la mise du second multipliée par son tems, est à son gain; c'est-à-dire, $2x. b - x :: 5a - 5x. c - a + x$. Le produit des extrêmes est égal à celui de ceux du mi-

milieu; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$; & ajoutant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même-tems $2xx$, on aura $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$; j'ajoute de part & d'autre $3ax + 5bx$, ce qui me donne $2cx + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$. Je suppose que $d = 2c + 3a + 5b$; ainsi $dx = 5ab + 3xx$; je prens aussi $f = 5ab$, que je retranche de part & d'autre, & j'ai $dx - f = 3xx$. Ensuite pour réduire cette Equation dans une formule qui me donne la résolution de la question, je suppose $d = 3g$ & $f = 3b$; ainsi $gx - b = xx$, je trouve un quarré égal à b, que je nomme ll, partant $gx - ll = xx$; laquelle Equation se réduit à cette progression $\div g - x . l . x$, car $gx - xx = ll$, & par conséquent $gx = ll + xx$, & $gx - ll$, $= xx$. Les extrêmes de cette progression sont $g - x$ & x, dont g est la somme. On trouvera leur difference si sur $AB = g$ ayant décrit le cercle AGB, on éleve perpendiculairement $BD = l$, & l'on tire de DG parallele à AB, & du point E, la perpendiculaire EF qui coupera AB aux points cherchez. La grandeur inconnue que l'on cherchoit est x. Or comme dans ce Problême on cherche la valeur de x en nombre, il faut du quarré de CE ou CB, moitié de AB, somme des extrêmes connus, ôter le quarré $FE = ll$ aussi connue, il restera le quarré de CF, moitié de la difference des extrêmes, dont la racine ajoutée à CB donnera le plus grand; & en étant ôté, le plus petit $x = 3$, mise du premier; après quoi tout le reste est facile.



AVER-

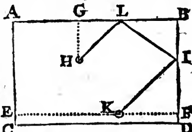
Avertissement.

On va voir dans les deux Problêmes suivant l'usage qu'on peut faire de la méthode qu'on vient d'enseigner pour résoudre des Problêmes qui sembleroient ne point appartenir à la Géometrie, dont cependant la résolution en dépend.

Probleme XV.

Soit le Billard ABCD. *Qu'il faille toucher la Bille* H *par deux bricoles, avec la Bille* K. 68

L'angle d'incidence & de réflexion sont égaux; suivant ce principe, on suppose que K poussée au point I doit réflechir vers L, & de L à H. C'est donc ce point I qu'on demande. Ayant mené par K la ligne EF, parallele au côté CD; & par l'autre point H, la ligne GH parallele à BD. Soit $KF=a$, $FB=b$, $BG=d$, $GH=f$, & $FI=x$: donc $BI=b-x$. Les triangles KFI & IBL étant semblables, $x.\ a :: b-x.\ BL$. Donc $BL=\frac{ab-ax}{x}$, & en corrigeant cette expression $BL=\frac{ab}{x}-a$. Or $GB-BL=GL$: ôtant donc $\frac{ab}{x}-a$ de d, on aura $GL=d+a-\frac{ab}{x}$.



Les triangles KFI & LGH sont semblables: donc $a.\ x :: d+a-\frac{ab}{x}.\ f$: donc $af=dx$

$+ ax - ab$; donc ajoutant ab de part & d'autre & divisant par $d + a$, on aura $\frac{af + ab}{d + a} = x$; & remettant cette Equation en proportion, on aura $d + a . f + b :: a . x$, c'est-à-dire, que FI est une quatrieme proportionnelle à ces trois lignes $BG + KF$, $GH + FD$, & KF ; elles sont connues ; partant FI qu'on cherchoit le sera ; ainsi le point I.

Si on voit donc que la Bille K aille par deux bricoles toucher la Bille H, il faut frapper K de maniere qu'elle aille à I, d'où elle réflechira à L & de L à H ; ce qui étoit proposé.

PROBLEME XVI.

69 *Deux points ou deux lieux étant donnez, avec un plan éloigné de ces deux points, l'on demande un point sur ce plan, où il faut aller, pour arriver d'un lieu à l'autre par le chemin le plus court.*

Ou ce qui revient au même :

Un objet lumineux étant donné avec un miroir, & un œil hors de ce miroir, trouver le point de réflexion.

Soient les points A & E donnez ; & soit aussi le plan BF. On demande sur ce plan le point D tel que la ligne AD plus DE soit la plus courte de toutes les autres menées de ce point à ce plan, par exemple, plus courte que $AG + GE$.

Pre-

Premiere maniere.

Soit menée la perpendiculaire AB prolongée jusques en C, en sorte que $AB = BC$. Et soit du point E menée la ligne CE; je dis que le point D est celui qu'on cherche : car les deux triangles ABD & DCB sont égaux, aussi-bien que les deux ABG & CBG: donc $AD + DE = CD + DE$, & $AG + GE = CG + GE$. 70

Mais $CD + DE$ est une ligne droite : donc elle est plus courte que $CG + GE$. Si le point G étoit entre B & D, ce seroit la même démonstration.

Remarquez que les deux triangles ABD & CBD étant égaux, ils sont semblables : donc les angles ADB & BDC sont égaux ; mais EDF est égal à BDC: donc EDF est égal à ADB; ainsi comme dans un miroir l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence, si l'objet est en E, & que le miroir soit BF, le point de réflexion sera D, & la lumiere réflechira au point A. Ainsi la lumiere est portée par le plus court chemin.

Seconde maniere.

On suppose que l'angle d'incidence EDF est égal à ADB, celui de réflexion. Il s'agit de trouver le point D où tombera la lumiere qui réflechit de l'objet E à l'œil A, & 71

va par le chemin le plus court. Les grandeurs connues sont $AB = a$, $EF = b$, & $BF = d$. L'inconnue est $BD = x$. Puisqu'on suppose que les angles d'incidence & de réflexion sont égaux, donc les deux triangles rectangles ABD & EFD sont semblables ; donc $a+b.\ a :: d.x$. Donc $\frac{ad}{a+b} = x$: ainsi la valeur de BD est connue.

Fin des Elémens de Géometrie.



IN-

INTRODUCTION
AUX
SECTIONS CONIQUES.



CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes que repréſentent les differentes Sections du Cône. Leurs noms, & la méthode la plus ſimple pour connoitre leurs principales proprietez.

JE n'ai parlé dans ces Elémens de Géometrie, que de la Ligne Droite & du Cercle; mais comme il y a d'autres Lignes qu'on nomme des Lignes Courbes, qui ſont maintenant l'objet principal des plus grands Géometres, à cauſe des proprietez ſingulieres & merveilleuſes qu'ils y découvrent, il ſeroît à propos de donner leur génération, avec quelques-unes de leurs principales proprietez. Je parlerai ſeulement des plus anciennes & des plus connues, qui ſont celles qu'on remarque en coupant le Cône de differentes manieres, & auxquelles on a donné le nom de *Sections Coniques*. Je déterminerai quelques-unes des principales proprietez de ces lignes. Voici comme elles s'engendrent dans le Cône.

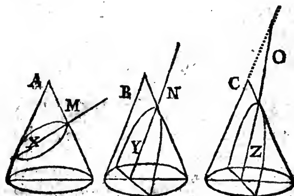
Soit imaginé un Cône droit.

1°. Si on le coupe par un plan qui passe par son axe, il est clair que cette Section sera un triangle, dont les côtez seront les côtez mêmes du Cône, & la base le diametre du cercle de la base du Cône.

Je suppose dans la suite, que le plan coupant, de quelque maniere qu'il coupe le Cône, est perpendiculaire sur le plan de ce triangle.

2°. Si le plan coupant est parallele à la base du Cône, la Section est un cercle, comme il est évident.

3°. Si le plan coupant n'étant pas parallele à la base, rencontre l'axe du Cône, & ses deux côtez (je veux dire les deux côtez de ce triangle, qui est la Section du Cône par un plan qui passe par son axe) cette Section, ou le coutour de cette Section représentera une ligne courbe, qu'on nomme *Ellipse* ou *Ovale*. Telle est la figure *X*, formée dans le Cône *A* par le plan coupant suivant la ligne *M*.

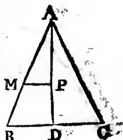


4°. Si le plan coupant ne coupe qu'un des côtez dudit triangle, & que la Section soit parallele à l'autre côté, cette Section ou le con-

contour de cette Section sera une autre Courbe, qui s'appelle *Parabole*. Telle est la figure Courbe Y, formée dans le Cône B par le plan qui le coupe, suivant la ligne N, parallele au côté.

5°. Si le plan coupant ne coupe qu'un seul côté, de maniere que ce plan prolongé puisse rencontrer l'autre côté dudit Cône ou Triangle aussi prolongé au-dessus du sommet, cette Section ou le contour d'icelle est ce que l'on nomme *Hyperbole*. Telle est la figure Z formée dans le Cône C par le plan coupant, suivant la ligne O.

Comme il n'est pas néceſſaire de s'imaginer un Cône pour expliquer la nature du cercle qui est une de ses Sections, on peut aussi découvrir les proprietez de toutes les lignes courbes que représentent les Sections du Cône, sans être obligé de penser à ce solide. Or il y a de certains termes dont nous devons nous servir, en parlant de ces Sections, qu'il faut expliquer.



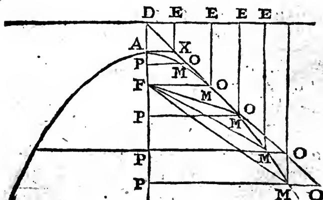
Soit le triangle BAC, qui est la Section du Cône par l'axe. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AD = a$, $BD = b$. On aura par-tout $x . y :: a . b$; donc $ay = bx$, qui est l'Equation qui exprime la nature du triangle.

Soit AMB un demi cercle, dont N est le centre, & $AN + NB$ ou AB est le diametre. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; ainsi $PB = a - x$. Partant $\div x . y . a - x$; ainsi $ax - xx = yy$ est l'Equation qui exprime la nature du cercle. Une perpen-

pendiculaire telle que *MP* menée d'un point quelconque *M* de la circonference sur le diametre *AB*, s'appelle *Ordonnée*; & la partie du diametre prise entre son extrémité & la rencontre de l'Ordonnée, se nomme *Abscisse*.



Soit *DEE* une ligne droite donnée, avec *F* un point hors de cette ligne; je nomme cette ligne *DEE* la Directrice. Soit *AMN* une courbe telle, que toute ligne perpendiculaire sur *DE* tombant sur *M*, un des points de la courbe, ait toujours un même rapport avec une se-



con le ligne tirée du point *M* au point donné *F*. Cette ligne courbe est réguliere, & se peut décrire; c'est-à-dire, qu'on peut trouver tous les points par lesquels elle doit passer. On donne ces noms à ses points, & à ses lignes.

Le

Le point *A* est le *sommet* de la courbe. Le point *F* se nomme le *Foyer*. La ligne *AF* prolongée en est l'*Axe*. Les lignes qui coupent perpendiculairement cet Axe, & qui sont comprises entre la courbe & cet Axe, s'appellent les *Ordonnées*. *PM* est une *Ordonnée*. La partie de l'Axe prise du sommet *A* jusques à la rencontre d'une Ordonnée, se nomme *Abscisse*. Ce qui fait la difference essentielle des trois Sections Coniques, la Parabole, l'Ellipse, & l'Hyperbole, c'est une raison qui est particuliere à la ligne *AD*, avec *AF*. Dans ces trois Sections, je nommerai ce rapport de *p* à *q*. Dans la Parabole, c'est toujours une raison d'égalité; à l'Ellipse, *p* est toujours plus grand que *q*; & dans l'Hyperbole, *p* est toujours plus petit que *q*. A cela près, la maniere de construire ces lignes est la même, & cette construction est aisée.

Chapitre II.

De la Parabole, ou Ligne Courbe que représente la Section d'un Cône droit, par un plan parallele à l'un de ses côtez.

Definition Premiere.

La ligne droite DE *est donnée, avec le point* F *hors de cette ligne.* DE *est la directrice de la Courbe, dont on parle. La ligne* FD *est perpendiculaire sur cette directrice* DE. *Si cette perpendiculaire est coupée au point* A, *de sorte que* FA = AD; *& que de chaque point de la Courbe comme* M *ayant mené sur* DE *une per-*

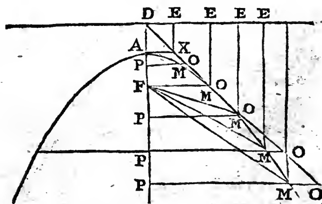
pendiculaire, & une autre ligne au point F, *ces deux lignes soient égales, que* MF=ME, *soit nommée cette Courbe, Parabole.*

On démontrera que cette Courbe est la Section Conique qu'on appelle Parabole. J'exprimerai ce rapport d'égalité de *EM* à *MF*, par ces deux lettres *p* & *q*.

PROBLEME I.

Trouver chaque point de la Courbe, qu'on vient de définir.

DE est la ligne directrice qui est donnée, & *F* le Foyer. Il faut couper *DF* en deux parties égales, ainsi *A* est le sommet de la Courbe. Pour trouver ces autres points, il faut 1°. par *A* mener une parallele à *DE*, dans laquelle on prend *AX* égale à *FA*; & par *D* & par *X* on tire une ligne indéfinie. 2°. Ayant ensuite mené tant de paralleles qu'on voudra à *DE*,



qui coupent l'Axe *DF* prolongé, on trouvera aisément les points de ces paralleles par lesquels passe la courbe; par exemple le point *M*, dans

dans la ligne PO. De l'intervalle de PO & du Foyer F comme centre, je fais un cercle qui coupera PO en M; alors $AD. AX :: p. q$, & $AD. AX :: DP. PO$. Or $DP = ME$, & par la construction $PO = FM$: Donc * $ME. FM :: p. q$. Ainsi M est un des points de la parabole, selon la Définition précédente.

Remarquez que la ligne indéfinie DX fait avec DF un angle de 45 degrez; car DAX est droit, & $AD = AX$: Donc ce triangle est isoscele; ainsi l'angle ADX est égal à AXD. Par conséquent chacun la moitié de l'angle droit ou de 45 degrez.

DEFINITION II.

Une ligne toujours double de FD, *ou quadruple de* FA, *ou de* AD, *s'appelle le* Parametre de la Parabole.

Soit nommé a ce Parametre; l'Ordonnée PM soit nommée y, & l'Abscisse PA soit nommée x. Il ne se faut mettre en peine, entendant parler de Parametre, d'autre chose que de ce que dit la Définition, qu'on appelle ainsi, une *Ligne Quadruple* de FA ou de AD.

REMARQUE.

Comme cette Introduction suppose la connoissance de ces Elémens de Géometrie, on n'aura pas la même rigueur pour citer les Propositions dont on tire les preuves, du moins dans les choses les plus faciles où l'esprit doit être versé.

THEOREME I.

Le rectangle fait du Parametre & de l'Abscisse, est égal au quarré de l'Ordonnée. Ou cette Ordonnée est une moyenne proportionnelle entre le Parametre & l'Abscisse.

FA

* L. 3. n. 53.

FA ou AD *fig. précéd.* soit nommé b. L'Abscisse AP a été nommée x. Donc PD ou $ME = b + x$, & $FP = x - b$ ou $b - x$, selon que le point P se trouve au-dessus ou au-dessous du Foyer F. Le Parametre a est quadruple de AD ou de AF, & partant de b; ainsi $a = 4b$. Il faut démontrer que $\div a . y . x$; ou ce qui est la même chose que $ax = yy$ *. Selon la premiere Définition $MF = EM$; mais $EM = PA + AD = b + x$. Donc $\overline{MF}^2 = bb + 2bx + xx$. Et puisque $FP = b - x$: donc $\overline{FP}^2 = bb - 2bx + xx$. Or $\overline{FM}^2 - \overline{EP}^2 = \overline{PM}^2 = yy$ †. Donc $bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx = yy$. Mais $+ bb - bb = 0$, & $+ xx - xx = 0$; reste donc $2bx + 2bx$, ou $4bx = yy$. Or $4b$ est la valeur du Parametre a; partant $ax = yy$, ou $a . y :: y . x$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Dans la Parabole les quarrez des Ordonnées sont entre eux, comme les parties de l'Axe prises entre son sommet & la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

Le Parametre a est toujours le même; mais x qui est l'Abscisse est plus petite ou plus grande, selon que l'Ordonnée est plus près ou plus éloignée du sommet A. Or puisqu'on a toujours $yy = ax$, en quelque endroit que l'on prenne l'Ordonnée; donc les yy ou les quarrez des Ordonnées sont entre eux comme les x, ou les Abscisses ‡.

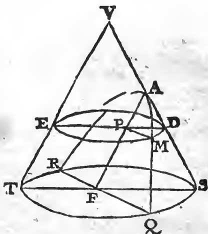
THEOREME II.

Cette Section Conique qu'on nomme Parabole, est

* *L.* 3. *n.* 58. † *L.* 4. *n.* 78. ‡ *L.* 3. *n.* 54.

est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.

SVT est un Cône droit coupé par un plan selon *AF* parallele au côté *TV*; il faut prouver que la Section *QAR*, qui est une Parabole, a les proprietez de la ligne courbe dont on vient de parler. Quelle que soit la ligne *QAR*, concevons que sur la ligne *AF*, les lignes *PM* & *QF* sont des perpendiculaires sur *AF*, que je nomme l'Axe de cette Courbe. *PM* & *QF* en sont ainsi les Ordonnées: par conséquent pour prouver que cette Parabole *QAR* est cette Courbe dont on vient de parler, il s'agit de prouver que les quarrés $\overline{MP}^2$ & $\overline{QF}^2$ & de toutes les autres Ordonnées, sont entre eux comme les parties *AP*, *AF*, de l'Axe qu'elles coupent; car cela étant il faut, selon le Corollaire précédent, que la Courbe *QAR* soit une telle ligne.



Concevons que le Cône droit *SVT* est coupé au point *M* par un plan parallele à sa base. Cette Section *PME* est donc un cercle. Soit *SQT* un autre cercle parallele à *DME*. La ligne *MP* est l'Ordonnée de la Parabole *QAR*, & du cercle *DME*, étant perpendiculaire tant sur *ED* que sur *AF*, d'autant qu'elle est

la

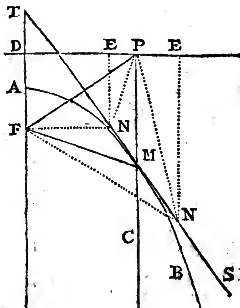
la commune Section du plan du cercle & de celui de la Parabole, qui par la construction, coupe celui du triangle à angles droits [a]. Il en est de même de QF, qui est aussi Ordonnée, tant au cercle qu'à la Parabole. Or $\div\!\div DP.MP.PE$[b]; & de même $\div\!\div SF.FQ.FT$: Donc $DP \times PE = \overline{MP}^2$, & $SF \times FT = \overline{FQ}^2$[c]: Donc $DP \times PE . SF \times FT :: \overline{MP}^2 . \overline{FQ}^2$; mais $PE = FT$[d]: Donc $\overline{PM}^2 . \overline{FQ}^2 :: DP . SF$[e]. Or à cause des triangles semblables DPA & SFA, $AP . AF :: DP . SF$: Donc $\overline{MP}^2 . \overline{FQ}^2 :: AP . AF$: Donc par le Corollaire précédent, QAR est de la nature de cette ligne dont on a parlé dans ce Chapitre, qui est aussi la Section Conique qu'on appelle *Parabole*.

THEOREME II.

Une Parabole étant donnée, mener sur un point quelconque une ligne touchante en ce point.

Soit la demi Parabole AMB; on demande que du point M, l'on mene la touchante MT. Soit

a *L.* 5. *n.* 20. & 30. b *L.* 4. *n.* 29. c *L.* 3. *n.* 57. d *L.* 4. *n.* 3. e *L.* 4. *n.* 75.



Soit menée du Foyer F au point M la ligne FM, & du point M la ligne MP parallele à l'Axe, & terminée par la directrice DP. Si l'on mene FP, & qu'on la divise en deux parties égales, la ligne MT menée par ce point de division sera la tangente que l'on demande; ce qu'il faut prouver.

Le triangle EMP est isoscele par la génération; donc MT est perpendiculaire sur FP *. Une ligne est touchante lorsqu'elle touche en un seul point, ce qui arrive ici; car toute autre point qu'on assigne en cette ligne TS, n'est pas dans la Parabole, mais hors d'icelle; que par exemple, N pris dans TS au-dessus ou au-dessous de M, n'est point dans la Parabole. Car soient me-

* L. 1. n. 43.

menées les lignes *NF*, *NP*, & *NE*, paralleles à l'Axe, *NP* sera toujours plus grande que *NE* *. Or par la construction, puisque *TN* est perpendiculaire sur *FP*, les lignes *NF* & *NP* sont égales †. *NF* est donc plus grande que *NE*, par conséquent *N* n'est pas un des points de la Parabole: car s'il l'étoit, *FN* seroit égale à *NE*, selon la Définition de la Parabole. Mais *FN* étant plus grande, ce point *N* sera hors d'icelle.

COROLLAIRE.

Il est évident que si la courbe *AMB* représente la Section d'un miroir parabolique, & que *CM* soit un rayon incident parallele à l'Axe *AF*, la ligne *MF* représentera le rayon réflechi; l'angle d'incidence *CMS* étant égal à *FMT*, l'angle de réflexion: car l'angle *CMS* est égal à l'angle opposé *TMP* ‡. Or par la construction, *TMP* est égal à *TMF*; donc *TMF* est égal à *CMS*. Partant tous les rayons qui tomberont sur la surface concave de ce miroir parallelement à l'Axe, se réuniront au point *F*: & c'est ce qui le fait appeller *Foyer*. Ainsi pour faire un bon miroir ardent, il faut lui donner la figure d'un Conoïde Parabolique creux.

CHAPITRE III.

De l'Ellipse ou de la ligne que représente la Section d'un Cône, par un plan, qui coupe ses deux côtez, & qui ne soit pas parallele à celui de la base.

DEFINITION PREMIERE.

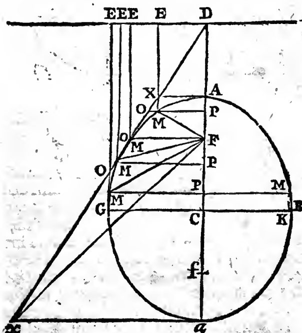
S*Oit donnée pour directrice de la ligne Courbe qu'on va définir, la ligne droite* DE *avec un point*

* L. 1. n. 53. † L. 1. n. 42. ‡ L. 2. n. 21.

point, F, *hors de* DE. FD *est perpendiculaire sur* DE. *Si cette perpendiculaire est coupée au point* A, *selon la raison de* p *à* q, *je suppose que* p *est plus grand que* q; *&* *que de chacun des points de la Courbe, comme de* M, *ayant mené une perpendiculaire sur* DE *&* *une autre ligne au point* F, *la ligne* EM *soit toujours à* FM *comme* p *à* q; *cette ligne se doit nommer* Ellipse, *parce qu'on prouvera qu'elle est la même que celle de la Section du Cône qui a ce nom.*

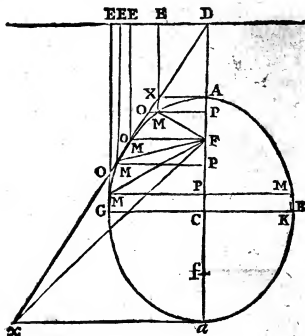
PROBLEME I.

La directrice DE *étant donnée avec* F, *qui est un point hors d'elle, trouver tous les points de cette Courbe qu'on vient de définir.*



Il faut 1°. diviser *FD* en *A*; de sorte que *AD. FA* :: *p. q.*

2°. Il



2°. Il faut mener par A une parallele à la directrice DE, & prendre AX égale à AF. Ainsi $AD. AX :: p. q.$

3°. Il faut tirer par D & X une ligne indéfinie; après quoi coupant l'Axe par tant de paralleles qu'on voudra, il sera aisé de trouver dans ces paralleles le point par où passe la courbe. De F comme centre, & de l'intervalle PO, je fais un cercle qui coupe PO en M. A cause des triangles semblables DAX & DPO, la ligne FD, ou son égale EM, est à PO ou FM, comme AD est à AX; partant $EM. FM :: AD. AX :: p.q.$ Le point M est donc un point de la courbe, qu'on vient de définir.

PRO-

PROBLEME II.

Trouver l'Axe de cette Courbe.

La ligne *DX* soit prolongée à l'infini, & sur le prolongement de *AD* au point *F* soit menée une ligne qui fasse un angle de 45 degrez, & continuée jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne indéfinie *DX*.

Du point *x* où se fait cette rencontre, soit menée la perpendiculaire *xa* sur *Fa*. Donc dans le triangle *Fax*, l'angle *Fxa* est aussi de 45 degrez: donc le triangle *Fax*, est isoscele. Or *AD*. *AX* :: *Da*. *ax* * ; & puisque *Fax* est isoscele, *ax* = *Fa*: donc *AD*. *AX* :: *Da*. *Fa*. Mais *AD*. *AX* :: *p*. *q*. Donc *Da*. *Fa* :: *p*. *q*. Partant *a* est un des points de la Courbe, comme il est évident.

DEFINITION II.

1°. A a *est le grand Axe de l'Ellipse. Le point* C *qui divise* A a *par la moitié, est le centre. La ligne* B G *qui coupe à angles droits* A a, *est le petit Axe. Ayant pris* f a *égale à* F A, *les points* F *&* f *sont les Foyers. Nous verrons pourquoi on leur donne ce nom.*

2°. *Les perpendiculaires menées d'un point quelconque de la Courbe à un des Axes, s'appellent* Ordonnées.

Ainsi *PM* étant une Ordonnée à l'Axe *Aa*, la ligne *AP* est une Abscisse.

3°. *La troisieme proportionnelle aux deux Axes est appellée* Parametre du premier de la proportion.

Parametre, c'est un nom dont il suffit de concevoir ce qu'on met dans sa Définition.

THEO-

* *L. 4. n. 16.*

THEOREME I.

L'intervalle Ff *des Foyers* F & f, *est au grand Axe* Aa, *comme* q *est à* p. *Fig. précéd.*

On a démontré que $q.p :: AX.AD :: Fa.Da$: Donc $Fa-AX.Da-AD :: q.p$. Or puisque $fa=FA=AX$: Donc $Fa-AX=Ff$. Mais $Da-AD=Aa$: Donc $Ff.Aa :: q.p$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II.

AC *moitié du grand Axe* Aa, *est une moyenne proportionnelle entre* FC, *moitié de l'intervalle des Foyers*, & *la ligne* CD.

La moitié est à la moitié, *Fig. précéd.* comme le tout est au tout; partant $AC.FC :: Aa.Ff$. Mais $Aa.Ff :: AD.AX$, par le Théorême précédent: donc $AC.FC :: AD.AX$; ou $FC.AC :: AX.AD$, & $FC.FC+AX :: AC.AC+AD$. Or par la construction $FA=AX$; ainsi $FC+AX=FC+FA=AC$, & $AC+AD=CD$. Mettant donc AC en la place de $FC+AX$, & CD en la place de $AC+CD$, viendra $FC.AC :: AC.CD$. Partant $\div FC.AC.CD$; ce qu'il falloit démontrer.

PREPARATION

Pour les démonstrations des Théorêmes suivans. Même Figure.

Soit $AC=d$, & $CF=g$: donc FA ou $AX=d-g$, & Fa ou $ax=d+g$. Or AC ou d est moyenne proportionnelle entre CF ou g & CD, par le Théorême précéd. donc $\div g.d.CD$. Donc multipliant d par d, & divisant le produit

duit dd par g, le quotient $\frac{dd}{g}$ sera égal à CD *.

Soit $CP = x$, & $PM = y$: donc $PF = x - g$, ou $g - x$ & DP, ou $ME = \frac{dd}{g} - x$, lorsque le point P est au-dessus du centre C. Par la génération de l'Ellipse,

$$d.\ g :: \frac{dd}{g} - x.\ MF = d - \frac{gx}{d} \dagger,$$

de laquelle proportion MF est le quatrieme terme. Lorsque le point P est au-dessous du centre C, alors $PF = x + g$ & DP, ou $ME = \frac{dd}{g} + x$: donc, comme dessus, $MF = d + \frac{gx}{d}$.

THEOREME III.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *au grand Axe* Aa, *est au rectangle* AP × Pa *parties de cet Axe, comme le rectangle* AF × Fa *aussi parties de cet Axe, est au quarré de* AC *ou* Ca *moitié de ce même Axe*, même Fig.

$AC = d$, $CF = g$, $PC = x$: donc $AP = d - x$ & $Pa = d + x$. Ainsi $AP \times Pa = dd - xx$. De même puisque $AF = d - g$, & $Fa = d + g$: donc $AF \times Fa = dd - gg$. Ainsi supposant $PM = y$; voilà ce qu'il faut démontrer,

$$yy.\ dd - xx :: dd - gg.\ dd.$$

Et pour cela, que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, c'est-à-dire, $yydd = d^4 - ddxx - ddgg + ggxx$.

Le triangle FMP étant rectangle $\overline{FM}^2 - \overline{PF}^2 =$

T

* *L. 3. n. 60.* † *L. 3. n. 60.*

$= \overline{PM}^2 = yy$. Or $FM = d - \frac{gx}{d}$; ainsi $\overline{FM}^2 = dd - 2gx + \frac{ggxx}{dd}$, & $PF = g - x$: donc $\overline{PF}^2 = gg - 2gx + xx$. Donc $\overline{PM}^2$, ou $yy = dd - 2gx + \frac{ggxx}{dd} - gg + 2gx - xx$. Or effaçant les termes qui se détruisent par $+$ & $-$, il viendra $yy = dd + \frac{ggxx}{dd} - gg - xx$; & multipliant tous ces termes de part & d'autre par dd, l'on aura $ddyy = d^4 + ggxx - ggdd - ddxx$; Donc, &c.

THEOREME IV.

Soit $BC = b$, *le rectangle* $AF \times Fa$, *où* $dd - gg$ *est égal à* bb *quarré de* BC *moitié du petit Axe* BG. Même Figure.

Il faut prouver que $bb = dd - gg$. $BC = b$ est une Ordonnée qui se trouve au centre; ainsi $x = o$, & $d - x = d$ & $y = b$; ainsi $yy = bb$. Or par le Théorême précédent $yy. dd - xx :: dd - gg. dd$. Donc mettant bb en la place de yy, & effaçant $- xx$, on aura $bb. dd :: dd - gg. dd$; ou $bb. dd - gg :: dd. dd$; ainsi $bb = dd - gg$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME V.

Le quarré de MK *Ordonnée au petit Axe* BG *est au rectangle* $BK \times KG$ *parties de cet Axe, comme le quarré du grand Axe* Aa *est au quarré du petit* BG. Même Fig.

Le grand Axe Aa est égal à $AC + Ca$ ou à $2\,AC$; partant à $2\,d$. On a nommé b la moitié du petit Axe BG; ainsi $2\,b = BG$. On a déja nom-

nommé x la ligne CP. Or l'Ordonnée MK lui est égale, qui sera ainsi x. La ligne PM ordonnée au grand Axe a été nommée y. Ainsi CK, qui lui est égale, est aussi y; partant $b - y = BK$ & $b + y = KG$, & $bb - yy = BK \times KG$ *. Le quarré du grand Axe Aa ou $2d$, est $4dd$. Celui du petit Axe BG ou $2b$, est $4bb$. Voilà donc ce qu'il faut démontrer,

$$xx.\ bb - yy :: 4dd.\ 4bb.$$

Selon le troisieme Théorême,

$$yy.\ dd - xx :: dd - gg.\ dd.$$

Par le quatrieme $bb = dd - gg$. Mettant donc bb en la place de $dd - gg$, vient

$$yy.\ dd - xx :: bb.\ dd.$$

Donc $yy.\ dd - xx :: 4bb.\ 4dd$ †; & multipliant les extrêmes & les moyens, l'on aura $4ddyy = 4bbdd - 4bbxx$, ou $4bbxx = 4bbdd - 4ddyy$; & remettant cette égalité en proportion, l'on aura enfin $xx.\ bb - yy :: 4dd.\ 4bb$ ‡.

THEOREME VI.

Le Parametre est au diametre comme le quarré de son Ordonnée est au rectangle fait des parties de ce diametre prises depuis la rencontre de cette Ordonnée. Même Figure.

AC moitié du grand diametre Aa a été nommé d; & b celle du petit, BC. Ainsi $BG = 2b$. Soit le Parametre nommé a; il faut, selon sa Définition, que $2d.\ 2b :: 2b.\ a$; Donc $\frac{4bb}{2d}$ ou $\frac{2bb}{d} = a$, & multipliant les deux membres de cette Equation par d, viendra $2bb = ad$, & di-

* *L. 3. n. 21.* † *L. 3. n. 54.* ‡ *L. 3. n. 58.*

divisant par 2, on aura $bb = \frac{1}{2} ad$. On a vu ci-dessus par les Théorêmes trois & quatre, que

$$yy.\ dd - xx :: bb.\ dd.$$

Mettant $\frac{1}{2} ad$ en la place de bb, on aura $yy.\ dd - xx :: \frac{1}{2} ad.\ dd.$ Divisant chaque terme de la raison de $\frac{1}{2} ad$ à dd par d, vient $\frac{1}{2} a,\ d$; & les multipliant par 2 vient $a,\ 2d$; ainsi $yy.\ dd - xx :: a.\ 2d$, ou $a.\ 2d :: yy.\ dd - xx$, qui est ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

Les quarrez des Ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des parties de l'Axe faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnés.

y & m sont deux differentes Ordonnées, & n une autre partie que PC. Par le précédent Théorême,

$$a.\ 2d :: \begin{matrix} yy.\ dd - xx. \\ mm.\ dd - nn. \end{matrix}$$

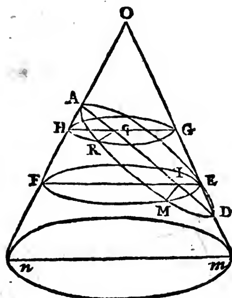
Donc $yy.\ mm :: dd - xx.\ dd - nn$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VIII.

La Section Conique qu'on nomme Ellipse, *est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.*

Soit coupé le Cône mon par un plan qui fasse un angle oblique avec son Axe, & qui coupe ses deux côtez. La Section $DMAD$, qui est une Ellipse, sera la même ligne que celle dont on vient de montrer les proprietez.

Soient

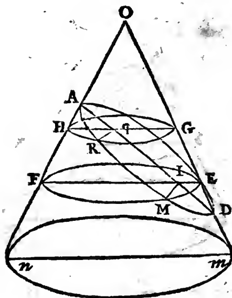


Soient imaginez les deux cercles paralleles *EMF* & *GRH*, dont les diametres coupent celui de la courbe *DMAD*, quelle qu'elle ſoit, en *I* & en *q*. Si l'on mene, des points *M* & *R*, où ces cercles coupent cette courbe, des lignes droites aux points *I* & *q*; il eſt évident que ces lignes ſeront des Ordonnées communes aux cercles & à la courbe *DMAD*, d'autant que *Rq* eſt perpendiculaire tant ſur *HG* que ſur *AD* *, étant la commune Section du plan du cercle & de l'Ellipſe, qui par la conſtruction coupent celui du triangle à angles droits. Il en eſt de même de *MI*.

Les triangles *AqH* & *AIF* ſont ſemblables; donc *Aq. FI* : : *Aq. AI*. Les triangles *DEI* & *DGq* ſont auſſi ſemblables; donc *Gq*.

* *L.* 5. *n.* 30. & 20.

EI:: *qD*. *ID*. Multipliant chaque terme de la premiere proportion par le terme qui lui ré-



pond dans la seconde, les produits seront en proportion étant composez de raisons égales *.

$Hq. FI :: Aq. AI,$

$Gq. EI :: Dq. DI;$

Ainsi $Hq \times Gq. FI \times EI :: Aq \times Dq. IA \times DI$, à cause des cercles *EMF* & *GRH*, selon les Elémens $\overline{qR}^2 = Hq \times qG$, & $\overline{IM}^2 = FI \times IE$: Donc $\overline{qR}^2. \overline{IM}^2 :: Aq \times Dq. AI \times ID$. Donc par le Théorême précédent cette Ellipse *DAMD* est la même que cette ligne dont nous avons démontré les proprietez, & qui par conséquent est cette Section Conique qu'on nomme *l'Ellipse*.

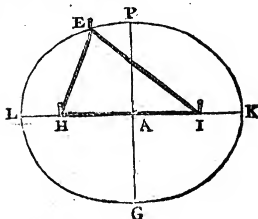
PRO-

* L. 3. n. 77.

PROBLEME III.

Décrire une Ellipse par un mouvement continu.

Soient donnez ces deux points *H* & *I* comme foyers d'une Ellipse, & la ligne *LK* comme le grand axe ou grand diametre. Pour décrire

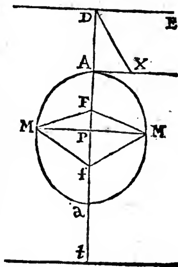


cette ligne, l'on prendra un fil dont la longueur sera égale au grand diametre de l'Ellipse, & l'attachant fixe par ses extrémitez aux deux points *H* & *I*, on conduira à la main une pointe mobile qui laisse une trace en tournant autour de *H* & de *I*. Cette trace sera une Ellipse; ce qu'il faut démontrer.

Par la construction de cette courbe quelle qu'elle soit, les deux lignes *HE* & *EI* prises ensemble, sont égales au grand axe *KL*; ainsi il n'est question que de prouver que l'Ellipse dont nous avons parlé, a cette proprieté.

Soit une Ellipse Géometrique, dont *Aa* est

le grand diametre, F & f sont les foyers. Il faut démontrer que $FM + Mf = Aa$.



Soit prolongé le diametre Aa de part & d'autre, de sorte que $AD. AF, $ ou $AX :: p. q$, & de même $at. af :: p. q$, & qu'ainsi $at = AD$.

Soit menée par t une parallele à DE. Les rapports de FM à PD sont les mêmes que fM à Pt. Par la Définition,

$$\left.\begin{matrix} FM.\ PD \\ fM.\ Pt \end{matrix}\right\} :: q.\ p :: AX.\ AD.$$

On a prouvé que $Ff.\ Aa :: AX.\ AD$ *: Donc $Ff + 2AX.\ Aa + 2AD :: AX.\ AD$. Or $Ff + 2AX = Aa$, & $Aa + 2AD = Dt$. Donc $Aa.\ Dt :: AX.\ AD$.

$$\left.\begin{matrix} FM + fM.\ PD + Pt. \\ \\ Aa.\ Dt. \end{matrix}\right. :: AX.\ AD.$$

Donc $FM + fM.\ PD + Pt :: Aa.\ Dt$.

Mais $PD + Pt = Dt$; donc $FM + fM = Aa$: ce qu'il falloit prouver.

Remarque.

C'est de cette maniere que les Jardiniers tracent les Ellipses, aussi nommées pour cela, Ovale du Jardinier. *Et lorsqu'on a les deux diametres don-*

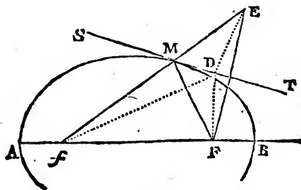
* *Théorême* 1.

donnez se coupant à angles droits, il faut pour en trouver les foyers H *&* I, Fig. de la p. 439. *de* P *ou de* G *extrémitez du petit Diametre, comme centres, & de l'intervalle* AL *ou* AK, *décrire une portion de cercle coupant* LK *en* H *&* I *qui soient lesdits foyers, comme il est évident par ce Problême.*

PROBLEME IV.

Une Ellipse étant donnée, mener d'un de ses points quelconque M *une tangente* MT.

Soient menées de ce point *M* aux deux foyers *F, f*, les deux lignes *MF, Mf*; & soit prolongée *fM* jusques en *E*, en sorte que *ME = MF*. Soit menée la ligne *EF*. Si on divise cette ligne *EF* en deux parties égales par la ligne *MT*, je dis que *MT* sera une Touchante.



Soit pris sur cette Touchante un autre point *D*, d'où l'on menera les lignes *DE* & *DF* qui seront égales *, puisque *MT* est perpendiculaire sur *EF*. Il faut aussi du point *D* mener la ligne *Df*. Or *fD* + *DE* est plus grande que *fM* + *ME*; par conséquent plus que *fM* + *MF*: car par la construction *MF* = *ME*; donc ce

T 5 point

* *L. 1. n. 32.*

point D ne peut être un de ceux de l'Ellipse, qui a cette proprieté par le précédent Théorême, que si D étoit un de ces points, $fD + DF = fM + MF$. La ligne DT ne rencontre donc l'Ellipse, qu'au point M.

COROLLAIRE.

Il est évident que si AMB *représente la Section d'un Miroir Elliptique, &* fM *soit un rayon incident, il se réflechira en* F.

Car l'angle d'incidence fMS est égal à l'angle de réflexion FMT; puisque l'angle SMf est égal à EMT *, qui est égal à TMF. Ainsi tous les rayons qui partiront de f, & qui tomberont sur la surface concave de ce Miroir, se réuniront au point F, & réciproquement s'ils partent du point F, ils se réuniront au point f: Et c'est pour cette raison qu'on appelle ces points *les Foyers*.

CHA-

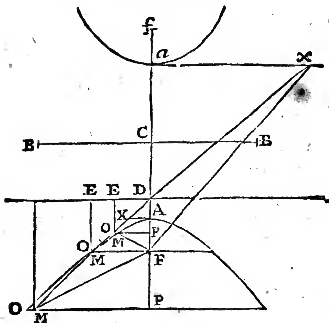
* L. 2. n 22.

CHAPITRE IV.

De l'Hyperbole, ou de la ligne qui représente la Section d'un Cône coupé par un plan parallele à son axe, ou même de maniere que coupant un seul côté dudit Cône, il puisse aussi couper l'autre étant prolongé au-dessus de son sommet.

DEFINITION I.

SOit DE *une ligne droite prise pour directrice,* & F *un point hors de cette ligne. La ligne* E D *est perpendiculaire sur* DE. *Si on di-*



vise F D *au point* A, *selon la raison de* p *à* q, (*on suppose ici que* p *est plus petit que* q) & *qu'on*

qu'on trace une courbe de laquelle ayant mené des perpendiculaires à DE *comme* EM, *& d'autres lignes à* F *comme* FM, *telles que* EM *soit à* MF *comme* p *à* q, *cette ligne se nomme* Hyperbole; *parce que l'on démontre qu'elle a les mêmes proprietez que la Section Conique de ce nom.*

PROBLEME I.

Trouver tous les points par lesquels passe cette Courbe.

Je mene *AX* parallele à *DE*, & égale à *FA*, & je tire une ligne indéfinie de part & d'autre par les points *D* & *X*. Après quoi menant librement tant de paralleles qu'on voudra à *DE*, comme *PO*; pour trouver le point de cette ligne *PO* par où passe la Courbe, je fais un cercle de *F* comme centre, & de l'intervalle *PO*. Le point *M*, où ce cercle coupe *PO*, sera le point que l'on cherche; car les triangles *DAX* & *DPO* étant semblables, *PO*. *PD* :: *AX*. *AD* : : *q*. *p*. Or par la construction *PO* = *FM*. & *PD* = *EM* : Donc *FM*. *EM* : : *q*.*p*. Le point *M* est donc dans l'hyperbole par la Définition précédente.

PROBLEME II.

Trouver le sommet d'une semblable Courbe, qui lui soit opposée.

En considerant les proprietez de cette courbe, on peut la comparer avec une autre courbe opposée toute semblable, dont on trouve le sommet par cette pratique. On fait sur *FD* l'angle *DFx* de 45 degrez, & du point *x* où *Fx* coupe la ligne indéfinie *XD*, on mene une perpendiculaire sur *Ff*. Le point *a* sur lequel tombe

be cette perpendiculaire, sera un des points de la Courbe : car Fax étant isoscele, $ax = aF$.

Par la construction, les triangles xDa & ADX sont semblables; donc $aD. ax$ ou $aF :: DA. AX$ ou AF. Ainsi $aD. aF :: DA. AF :: p. q$; Donc $aD. aF :: p. q$. Ainsi le point a sera celui d'une Courbe opposée & semblable, ayant pris $fa = FA$, pour avoir le Foyer f, selon la Définition suivante.

DEFINITION II.

La ligne Aa *s'appelle* Axe traversant *ou* Axe prolongé. *Le point* C *qui divise en deux l'Axe traversant, se nomme le* Centre.

Si l'on mene par C *une perpendiculaire* BB, *dont la grandeur est déterminée par un cercle dé-*

crit du point A & *de l'intervalle* CF, *cette ligne* BB *se nomme l'*Axe conjugué.

Les points F & f *sont les* Foyers.

Les perpendiculaires menées d'un des points des Courbes sur un des Axes, sont les Ordonnées.

Les Abscisses *sont les parties de ces Axes prises depuis leur origine jusqu'à la rencontre des Ordonnées.*

Quelquefois leur origine est au centre, & quelquefois au sommet des Hyperboles.

La troisieme proportionnelle aux deux Axes est appellée Parametre du premier de la proportion.

THEOREME I.

L'Axe traversant Aa *est à* Ff, *intervalle des Foyers, comme* p *à* q.

Dax & DAX sont deux triangles semblables: *figure précéd.* Donc $AX.\ ax :: AD.\ Da$. Or $AX = AF$ & $ax = aF$: Donc $AF.\ aF :: AD.\ Da$. Donc *componendo* $AD + Da.\ AD :: AF + Fa.\ AF$. Mais $AF + Fa = Ff$: car $AF = af$ & $AD + Da = Aa$. Donc $Aa.\ AD :: Ff.\ AF$, & $Aa.\ Ff :: AD.\ AF$. Or AD, AF, ou $AX :: p.\ q$; Donc $Aa.\ Ff :: p.\ q$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

CD *est une troisieme proportionnelle à* CA & CE. *figure précédente.*

Puisque les Touts sont aux Touts, comme les Moitiez sont aux Moitiez, que CF est la moitié de Ff, & CA est la moitié de Aa: donc $Ff.\ Aa :: CF.\ CA :: AX.\ AD$: donc $CF.\ CA :: CF - AX$ ou $AF.\ Ca - AD$. Or CF.

$CF - AF = CA$, & $CA - AD = CD$. Donc $CF . CA :: CA . CD$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME III.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *à l'axe* Aa *traversant, est au rectangle de* AP × Pa *parties de cet axe, comme le rectangle* AF × Fa *est au quarré de* CA *ou* Ca.

Soit $CA = d$, l'Ordonnée $PM = y$, $CP = x$, & $CF = g$; donc *figure précéd.* lorsque P est au-dessous ou au-dessus du point F, $PF = x - g$, ou $g - x$. L'on aura donc $DP = x - \frac{dd}{g}$; car par le Théorême précédent $CD = \frac{dd}{g}$. Mais par la construction & par le Théorême premier, $d . g :: x - \frac{dd}{g} . MF$; Donc $MF = \frac{gx}{d} - d$ *. Si le point P étoit au-dessus du point a, alors on trouveroit $MF = \frac{gx}{d} + d$.

Il faut donc prouver que yy ou $\overline{PM}^2 . xx - dd$, ou $AP \times Pa :: gg - dd$, ou $AF \times Fa . dd$, ou $\overline{CA}^2$, ou $\overline{Ca}^2$; ce qui est facile : car à cause du triangle rectangle MPF, $\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{PF}^2$ †, c'est-à-dire, en termes analytiques, $yy = \frac{ggxx}{dd} - xx - gg + dd$; ou en multipliant de part & d'autre par dd; on aura $yydd = ggxx - ddxx - ggdd + d^4$, & remettant les termes qui

* L. 3. n. 60. † L. 4. n. 7.

qui composent cette égalité en proportion, on trouvera $yy.\ xx-dd :: gg-dd.\ dd$, ce qu'il falloit démontrer.

Theoreme IV.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *à l'axe* Aa *est au rectangle des parties de cet axe, savoir à* AP×Pa, *comme le quarré de l'axe conjugué* BB *est au quarré de l'autre axe* Aa. Même figure.

Concevons un triangle rectangle ABC; selon la Définition de l'axe conjugué, $AB=FC$, on a supposé $FC=g$, & $AC=d$; supposons $BC=b$. Donc ABC étant rectangle, & $AB=g$; il faut que $bb=gg-dd$*. Or par le Théorême précédent, $yy.\ xx-dd :: gg-dd$, ou $bb.\ dd$. Multipliant bb & dd. par 4, ils demeurent en même raison †. Donc $yy.\ xx-dd :: 4bb.\ 4dd$. Or $AP\times Pa=xx-dd$. Donc le quarré de yy est au rectangle $AP\times Pa$, comme $4bb$, quarré de l'axe conjugué BB ou $2b$, est au quarré $4dd$ de l'autre axe Aa égal à $2d$.

Theoreme V.

Le Parametre est au diametre comme le quarré d'une Ordonnée quelconque, est au rectangle des parties de cet axe faites pas la rencontre de cette Ordonnée.

Soit conservée la même dénomination des parties que ci-devant & même figure, & m soit le Parametre de l'axe Aa, lequel par sa Définition est une troisieme proportionnelle auxdits axes; ainsi $\div\ m.\ 2b.\ 2d$. Mais à cause de cette proportion on aura $m.\ 2d :: 4bb.\ 4dd$‡. Or par le Théorême précédent, $4bb$ est à $4dd$ comme le quarré yy de l'Ordonnée est à $xx-dd$ rectan-

* L. 4. n. 78. † L. 3. n. 54. ‡ L. 3. n. 86.

rectangle des parties de l'axe ; donc $m. 2d : : yy. xx - dd$, ce qu'il falloit démontrer.

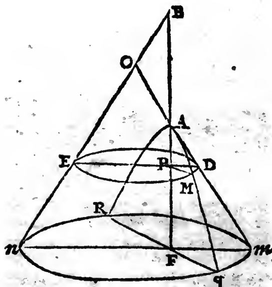
THEOREME VI.

Les quarrez des Ordonnées sont entre eux comme les rectangles des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

Ce qui est évident, puisque dans quelque endroit que se trouve le point P, le parametre m est au diametre $2d$, comme yy quarré de l'Ordonnée est au rectangle $xx - dd$, ou $Ac \times Pa$ fait des parties de cet axe déterminées par l'Ordonnée.

THEOREME VII.

Cette Section Conique qu'on nomme Hyperbole, *est la même Courbe, que celle qu'on vient de décrire.*



Soit $m\ O\ n$ un Cône coupé par un plan, qui ren-

rencontre aussi en *B* l'autre côté *n O* du Cône, prolongé au-dessus du sommet *O*. Cette Section *q A R* sera la Courbe dont on vient de parler, ou cette Courbe est veritablement cette Section du Cône qui s'appelle *Hyperbole*.

Soit imaginé un cercle *DME* parallele à *mqu*, celui de la base. Leurs diametres coupent l'axe de l'Hyperbole aux points *P* & *F*. Les lignes *MP* & *Fq* sont perpendiculaires sur ces diametres aussi-bien que sur l'axe *AF**, d'autant qu'elles sont les communes Sections de deux plans perpendiculaires à celui du triangle; par conséquent elles sont des Ordonnées tant du cercle que de la Courbe *DME*. Or $\overline{MP}^2 = DP \times PE$, & $\overline{Fq}^2 = mF \times nF$†. Il faut démontrer que $\overline{MP}^2$, ou *DP*

* *L.* 5. *n.* 30. & 20. † *L.* 4. *n.* 29.

$DP \times PE$ est à $\overline{Fq}^2$, ou à sa valeur $mF \times nF$, comme $AP \times PB$ est à $AF \times FB$.

Les deux triangles DAP & mAF sont semblables. Les deux triangles FBn, & PBE sont semblables. Donc

$$mF.\ DP :: FA.\ PA.$$
$$nF.\ PE :: FB.\ PB.$$

Multipliant chaque terme de la premiere proportion par le terme qui lui répond dans la seconde, les produits seront en proportion, étant des rectangles dont les raisons composées des côtez, sont semblables *.

$DP \times PE.\ mF \times nF :: AP \times PB.\ AF \times FB.$

Donc puisque $\overline{MP}^2 = DP \times PE$, & $\overline{Fq}^2 = mF \times nF$.

$\overline{MP}^2.\ \overline{Fq}^2 :: AP \times PB.\ AF \times FB$; ce qu'il falloit prouver.

AVERTISSEMENT.

Si l'on prolonge le côté du Cône, ensorte que l'on imagine un autre Cône opposé par le sommet à celui-ci, il est clair que si l'on continue le plan coupant, il formera dans cet autre Cône une Section semblable, qui sera l'Hyperbole opposée.

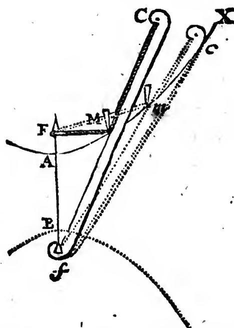
PROBLEME III.

Décrire l'Hyperbole par un mouvement continu.

Soit AMX une hyperbole, *figure suivante.* A est son sommet, & F son foyer. B est le sommet de son hyperbole opposée, qui a f pour foyer. On peut concevoir que cette hyperbole a été décrite, ou qu'elle le peut être de cette maniere.

La

* *L.* 3. *n.* 77.



La ligne *Cf* coupe l'hyperbole *AMX* au point M. Considerons cette ligne *Cf*, comme une règle au bout de laquelle est attachée une corde dont l'autre extrémité est attachée au foyer *F*. Cette règle est fixe par son autre bout au foyer de l'hyperbole opposée, au tour duquel point *f* elle peut tourner.

Concevons cette règle dans une premiere situation, couchée sur *AB*, & la corde de telle longueur que *M* convient alors avec *A*. Mettons le doigt au point *A* ou *M*, & laissons-le couler vers *X* en faisant tourner la règle; mais tenant toujours la corde jointe & comme colée contre la règle. A mesure que la règle tournera, le doigt consideré comme une pointe, décrira l'hyperbole *AMX*.

C o-

COROLLAIRE I.

De cette construction il s'ensuit, qu'ayant men! de chaque point de l'Hyperbole deux lignes droites aux deux foyers F *&* f, *la difference de ces deux lignes sera toujours la même.*

Dans la premiere situation où M est sur A, la règle sur AB ou sur Ff, il est évident que la difference de Mf avec MF, c'est-à-dire, $Mf - MF$, est AB, puisque $FA = fB$; cette difference est toujours la même dans les autres situations. Car à mesure que la règle tourne, & que le doigt coule, la corde MF & la partie de la règle Mf s'alongent également. Ainsi ces deux grandeurs conservent une même difference.

COROLLAIRE II.

Une hyperbole se peut étendre ou être continuée à l'infini.

Car si on prolonge à l'infini la règle Cf, & en même tems la corde MC, en faisant tourner la règle, & continuant de presser la corde comme ci-dessus, on prolongera l'hyperbole sans fin. Il est évident que le point M s'éloignera de plus en plus du foyer F, à mesure que la règle fC tournera.

AVERTISSEMENT.

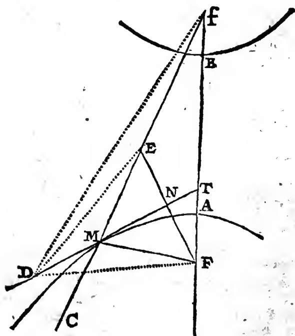
L'hyperbole étant prolongée & continuée à l'infini comme on vient de le dire, elle s'approche de plus en plus d'une certaine ligne droite, sans jamais la rencontrer; ce qui fait qu'on nomme cette ligne droite l'asymptote de l'hyperbole. Ce nom qui est Grec, marque cette proprieté.

PROBLEME IV.

D'un point quelconque d'une Hyperbole, mener la touchante MT.

Soient A & B deux hyperboles opposées. On a me-

a mené du point donné M aux foyers F & f les lignes MF, Mf, & divisé l'angle FMf en deux parties égales par la ligne MT; je dis que cette ligne est touchante ou tangente.



Soit pris ME égale à MF. Soient encore d'un point quelconque D dans la tangente MT menées les lignes DF, Df & DE. Les triangles MFN & MEN seront égaux; comme aussi NDF & NDE.

Il s'agit de prouver que le point D qui est dans la tangente MT, n'est point dans l'hyperbole; & qu'ainsi cette tangente ne la touche point, ou ne la rencontre point en D.

Si D étoit dans l'hyperbole, $Df - DF = Mf - MF$, par le Corollaire précédent. Or cela n'est

n'est pas ; car ME étant pris égale à MF, donc $Mf - MF = Ef$. Et puisque DE est égale à DF, donc $Df = Ef + DF$. Mais dans le triangle DEf, les côtez DE & Ef pris ensemble, sont plus grands que le côté Df ; donc DE surpasse DF ; donc le point D n'est point un de ceux de l'hyperbole ; ce que l'on peut dire de tout autre point de la ligne MT, autre que M pris au-dessus ou au-dessous de M ; donc cette ligne MT ne rencontre l'hyperbole qu'en un point, dont elle est touchante.

COROLLAIRE.

Si la Courbe AM *représente la Section d'un Miroir hyperbolique, & que* CM *soit un rayon incident qui tombe sur la surface concave de ce Miroir au point* M, *partant de* C, *& tendant vers le foyer* f *de l'Hyperbole opposée, il se réflechira en* F.

L'angle DMC est égal à l'angle EMN, égal par la construction à NMF ; ainsi DMC est égal à NMF. L'angle d'incidence CMD étant donc égal à l'angle de réflexion FMT, le rayon CM réflechira en F au foyer de l'hyperbole. Ce que l'on doit entendre de tout autre rayon incident : Et c'est pour cela qu'on a nommé les points F & f, les Foyers.

CES *Courbes ont un grand nombre d'autres proprietez, que l'on peut voir dans l'excellent Traité des Sections Coniques, de défunt Monsieur le Marquis de l'Hôpital.*

FIN.

T A-



TABLE

DES PROPOSITIONS

des Elémens d'Euclide, avec les lieux où elles se trouvent dans cet Ouvrage. Le premier chiffre marque les Propositions d'Euclide. Le second, qui un est chiffre Romain, indique le Livre de cet Ouvrage où elles se trouvent. Et le troisieme, dans quel nombre de ce Livre. Les VII. VIII. & IX. Livres d'Euclide ne regardent que les nombres, dont il ne s'agit pas dans la Géometrie. On ne les cite presque jamais, non plus que le X. Livre; ainsi on n'a pas cru qu'il fût utile de rapporter les Propositions de ces Livres, comme on l'a dit ailleurs.

EUCLIDE LIVRE PREMIER.

EU-

EUCLIDE LIVRE SECOND.

1	III.	17	6	III.	22	11	IV.	54
2	III.	18	7	III.	23	12	III.	27
3	III.	19	8	III.	24	13	III.	28
4	III.	20	9	III.	25	14	IV.	84
5	III.	21	10	III.	26			

EUCLIDE LIVRE TROISIEME.

1	I.	87	14	I.	94	27	II.	43
2	I.	83	15	I.	95	28	I.	32
3	I.	91			& 96	29	I.	32
		& 92	16	I.	106	30	I.	85
4	I.	93			& 109	31	II.	44
	II.	48		II.	32			45
5	I.	17	17	I.	113			& 46
6	I.	78	18	I.	106	32	II.	37
7	I.	102	19	I.	108	33	II.	49
8	I.	99	20	II.	41	34	II.	48
9	I.	102	21	II.	40	35	IV.	55
		& 104	22	II.	114	36	IV.	56
10	I.	89	23	I.	98	37	IV.	59
11	I.	81	24	I.	31			
12	I.	82	25	I.	80			
13	I.	80	26	II.	42			

EUCLIDE LIVRE QUATRIEME.

1	I.	30	7	II.	126	12	IV.	160
2	II.	100	8	II.	125	13	IV.	161
3	II.	101	9	II.	127	14	IV.	162
4	II.	102	10	IV.	149	15	IV.	143
5	II.	70			& 151	16	IV.	163
6	II.	124	11	IV.	158			

EUCLIDE LIVRE CINQUIEME.

1	III.	64	8	III.	92	15	III.	64
2	III.	65	9	III.	52	16	III.	46
3	III.	66	10	III.	92			& 56
4	III.	67	11	III.	53	17	III	51
5	III.	68	12	III.	56			& 57
6	III.	69	13	III.	93	18	III.	49
7	III.	70	14	III.	94	19	III.	48

EUCLIDE LIVRE SIXIEME.

EUCLIDE LIVRE ONZIEME.

EUCLIDE LIVRE DOUZIEME.

EU-

EUCLIDE LIVRE TREIZIEME.

1	IV.	66	9	IV.	154		&	154
2	IV.	68	10	IV.	164	16	V.	171
3	IV.	69	11	IV.	170		&	167
4	IV.	70	12	IV.	146	17	V.	161
5	IV.	35	13	V.	150		&	162
6	IV.	139		&	152	18	V.	173
7	IV.	168	14	V.	156			
8	IV.	169	15	V.	153			

EUCLIDE LIVRE QUATORZIEME.

1	V.	176	4	V.	174	7	V.	180
2	IV.	67	5	V.	178	8	V.	157
3	V.	172	6	V.	179			

EUCLIDE LIVRE QUINZIEME.

1	V.	181	3	V.	183	5	V.	185
2	V.	182	4	V.	184			

CATALOGUE
DES
LIVRES NOUVEAUX

De Mathématique & de Physique,

Qui se trouvent à AMSTERDAM,

Chez

PIERRE MORTIER.

A.

ABregé de Mathématique pour l'Usage de Sa Majesté Impériale de Russie, 2 vol, 8. Petersbourg 1728.

Analyse des Infiniment Petits, par Mr. de l'Hôpital, 4. Paris 1716.

L'Arithmétique par Tarif, par Mirabaud, 4. 2 vol. 1722.

—— Nouvelle d'une Méthode très facile par ses Abregez & par la supression des parties Aliquotes, par Monier de Clairecombe, 12. Paris 1719.

Art de Tourner, ou de faire en perfection toutes sortes d'ouvrages au tour, enrichi de près de quatre-vingts planches en taille douce, par Charles Plumier, fol. Paris.

C.

CAlculs d'usage pour trouver promptement les Poids & les Mesures suivant leur prix, 8. Paris 1726.

La

La Chronologie des Anciens Royaumes corrigée, traduite de l'Anglois du Chev. I. Newton, 4. Paris 1728.
Commentaires sur l'Analyse des Infiniment petits par Crousaz, 4. fig.
—— sur la Géometrie de Descartes, par le Pere Rabuel. 4. 1730.
Commerce rendu facile, ou l'Arithmetique Universelle débarrassée des parties aliquotes, par Clairecombe. 4. Haye 1723.
Communes Mesures & Racines communes, par le Sr. Taneguy le Fevre, 8. Paris 1714.
Cours de Mathématiques par Ozanam. 8. Paris 4 vol. 1693.
—— d'Architecture par Blondel. folio.
—— —— qui comprend les Ordres de Vignole, par Daviler, 4. 1730.
—— de Mathématique, par Blondel, 4. 2 vol. 1699. avec fig.
—— Nouveaux de Mathématiques à l'usage de Artillerie & du Génie, par Belidor, 4. Paris, 1725. fig.
—— de Physique par Hartsoeker, 12. avec fig. 1730.

D.

DEscription abregée d'une Horloge d'une nouvelle invention, pour la juste mesure du tems sur Mer, avec le Jugement de l'Académie Royale des Sciences, & une Dissertation sur la nature des Tentatives, par Sully. 4. Paris 1726.
Dictionaire de l'Academie Françoise, fol. 2 vol. sec. Ed. Paris.
—— de Marine, contenant les termes de la

la Navigation & de l'Architecture Navale, 4. avec fig.

Dictionaire des Arts & des Sciences, de M. D. C. de l'Académie Françoise, Nouv. Edition, revue, corrigée & augmentée par MM. de l'Académie Royale des Sciences, fol. 2 vol. Paris 1732

—— Mathématique d'Ozanam, 4. fig.

Discours touchant le point de Vue, par Le Clerc, 12. Paris 1679.

E.

Eclaircissemens sur l'Analyse des Infiniment petits du Marq. de l'Hôpital, par Varignon, 4. fig. Paris.

Elémens d'Euclide, par Dechales. 12. Paris 1728.

—— de Géometrie, avec un Traité des Logarithmes, par Mr. de Malezieu, 8. Paris 1722.

—— de Mathématiques par Prestet, 4. 2 vol.

—— de Géometrie, ou de la Mesure de l'Etendue, par le P. Lamy, 12. Amst. 1734.

—— des Mathématiques, ou Traité de la Grandeur en général, par le R. P. B. Lamy, 12. Nouv. Edition. Amst. 1733.

Entrétiens Physiques d'Ariste & d'Eudoxe, ou Physique nouv. en Dialogues, par le Pere Regnault. 12. 4 vol. Amst. avec fig. 1732. & 1733.

Entretiens sur les Sciences, dans lesquels on apprend comme l'on doit étudier les Scien-

ces.

ces, & s'en ſervir pour ſe faire l'Eſprit juſte & le Cœur droit, par le Pere Lamy, 12. 1724.

— ſur les Vies & les Ouvrages des plus excellens Peintres & Architectes anciens & modernes, par Mr. Felibien, 12. 6 vol.

Eſſais d'une Nouv. Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux, par Bernoulli, 8. fig.

Etat Militaire de l'Empire Ottoman, ſes Progres, & ſa Decadence, en François & Italien, par le Comte Marſigli, fol. Haye 1732. avec fig.

Examen des Prejugez Vulgaires, avec les Elemens de Metaphyſique, par le P. Buffier, 12. Paris 1725.

Exiſtence de Dieu demontrée par les merveilles de la Nature, par Nieuwenteyt, 4. 1728.

F.

FOnctions & principal devoir d'un Officier de Cavalerie, augmentées des Reflexions ſur l'Art Militaire, 12. Paris, 1726.

— des Generaux, ou l'Art de conduire une Armée, par Grimaret, 8. avec fig. Haye, 1710.

Fortifications de Hartman, 8. fig.

— de Landsbergen, 4.

— d'Ozanam, 8.

G.

LA Géometrie Pratique par Mr. Mallet, 4 vol. 8. avec plus de 500 figures en

Taille douce, Paris 1702.

La Géometrie Pratique de le Clerc, 12. avec fig.

—— de Mr. Descartes. 12.

—— de Mr. de Crousaz, 12. 2 vol. fig.

Gnomonique Universelle, ou Science de Tracer les Cadrans Solaires sur toutes sortes de surfaces tant stables que mobiles, 8. Paris, 1701.

H.

HArtsoeker Conjectures Physiques, 4. 2 vol. & autres œuvres.

Histoire Militaire de Louis XIV. par le Marq. de Quinci, 4. 7 vol. fig.

—— de l'Académie appellée l'Institut des Sciences & des Arts, établi à Boulogne en 1712. avec les Pièces authentiques, d'où l'on a tiré les circonstances de ce récit, 8.

—— de la Milice Françoise, par le Pere Daniel, 4. 2 vol. fig.

—— de l'Academie Royale des Sciences, avec les Mémoires de Mathématique, Physique &c. tirés des Registres de la dite Académie, jusqu'à l'année 1730. 12.

—— de Polybe, traduite du Grec par le P. Vincent Thuillier, avec un Commentaire ou un Corps de Science Militaire, enrichi de Notes Critiques & Historiques, où toutes les parties de la Guerre, soit pour l'Offensive, soit pour la Défensive, sont expliquées, démontrées, & représentées en figu-

figures, par Mr. le Chevalier de Folard, 4. 6 vol. fig. Amst. 1730.

—— Le même Ouvrage sur du grand papier, 6 vol. 4.

I.

INstruction Nouv. à la Géometrie Pratique, tirée des meilleurs Auteurs, par le Chevalier Daudet 12. 3 vol. 1730.

Journal des Observations Physiques, Mathématiques & Botaniques, par le Pere Feuillée, 4. fig.

L.

LEttres Critiques de Monsieur Saurin de l'Académie R. des Sciences à Mr. *** sur le Traité de Mathématique du P. Castel. 4. Paris 1730.

M.

MAniere de bâtir pour toutes sortes de personnes, par Pierre le Muet, Architecte du Roi, fol.

Méchanique ou Statique dont le projet fut donné par Mr. Varignon, 4. 2 vol. avec fig. Paris 1725.

Mémoires d'Artillerie, 4. 2 vol. avec fig.

—— sur la Guerre, où l'on a rassemblé les Maximes les plus nécessaires dans les Operations de l'Art Militaire, 12. Amst. 1731.

—— de l'Académie Royale des Sciences, contenant les Ouvrages adoptez par cette Academie avant son renouvellement en 1699.

 5 vol.

5 vol. 4. enrichis de beaucoup de figures, Haye 1721.
—— Les volumes ſuivans ſous preſſe.
Méthode pour règler les Montres & les Pendules, par Mr. Sully, 12. Paris 1728. avec fig.
—— pour la Meſure des ſurfaces, par Carré, 4. avec fig. Paris 1700.

N.

NOuveau Cours de Mathématique par Belidor, 4. fig.
Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné par Mr. Varignon, 4. 2 vol. fig.

O.

OBſervations ſur toutes les parties de la Phyſique, 12. 2 vol.
—— Mathématiques, Aſtronomiques & Géographiques, par le P. Souciet, 4. Paris 1729.
—— idem le tome 2 & 3. contenant l'Hiſtoire, & un Traité de l'Aſtronomie Chinoiſe avec des Diſſertations &c. 4. Paris.
Oeuvres de Pardies, 12. 1725.
—— Poſthumes de Rohault, 12. 2 vol.
—— de Deſcartes, 12. 13 vol.
—— diverſes de Phyſique & de Méchanique de Meſſrs. Perrault, 4. 2 vol.
Ouvrages adoptés de l'Académie des Sciences, 4. 5 vol. 1729. & les ſuivans ſous preſſe.

P.

P.

Parallele de l'Architecture Antique & Moderne, fol. Paris avec fig.
— de l'Architecture antique & de la moderne, avec un Recueil des dix principaux Auteurs, qui ont écrit des cinq Ordres. Planches originales, fol. Paris, seconde Edition augmentée.
Physique de Rohault, 8. 2 vol.
— Occulte, ou Traité de la Baguette Divinatoire, 12. 2 vol. 1722.
Pluralité des Mondes, par Huygens, 12. fig.
Pratique de la Mémoire Artificielle, par Buffier, 12. 2 vol. Paris, 1727.
Principes de la Fortification moderne, 8. fig.
— de l'Architecture, de la Sculpture & de la Peinture, par Felibien, 4. Paris 1699.

R.

Recherches sur les Courbes à double Courbure, 4. Paris 1731.
Recréations Mathématiques, par Ozanam, 8. 4 vol. fig.
Recueil de plusieurs Ouvrages de Mathématiques &c. par Mr. de Serviere, 4. fig.
— des Pieces, qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences, 4. Paris.
— des Lettres au sujet des Maléfices & des Sortileges, par Mr. Boissier 12. Paris 1731.

S.

SCience des Ingenieurs, par Belidor, 4. tome premier. Paris 1729. avec fig.
Secrets concernant les Arts & les Métiers, 12. 4 vol.
Sentimens d'un homme de Guerre fur le Nouveaux Syftême du Chevalier de Folard, par M. D***. 4. Haye 1733. avec fig.
Spectacle de la Nature, ou Entretiens fur les Particularités de l'Hiftoire Naturelle, 12. 2 vol. Utrecht 1733.
Syftême Nouveau du Microcofme par Tymogue, 8. 1727.

T.

TEinturier parfait, ou inftruction pour la teinture des Laines, 12. Paris 1721.
Traité de la Phyfique par Caftel, 12. 2 vol.
—— du Mouvement & de la Mefure des Eaux coulantes, par Varignon, 4.
—— de la Peinture en mignature, pour apprendre aifément à peindre fans maitre. 12.
—— de la Conftruction des Grands Chemins des Romains & des Modernes, 8. fig.
—— d'Optique par Newton, traduit de l'Anglois, 12.
—— de l'Algebre par Croufaz, 8. fig.
—— d'Architecture, avec des Remarques & des Obfervations très utiles par Seb. le Clerc, 4. Paris 1718.
—— des Forces mouvantes pour la pratique des Arts & Métiers, par Camus, 8. Paris 1729.

Trai-

Traité Analytique des Sections Coniques, par le Marq. de l'Hôpital, 4.

—— de la Construction & des principaux usages des Instrumens de Mathématiques, avec les figures, par Bion, 4.

—— des Metaux & des Mineraux, par Chambon, 12. Paris 1714.

—— de la Grandeur de la Terre, par Cassini, 12.

—— d'Algebre, ou Principes généraux pour résoudre les Questions de Mathématiques, par Rolle. 4. Paris.

—— de l'incertitude des Sciences. 12. 1725.

—— des Machines & Inventions extraordinaires, par Papin. 8. Paris.

—— de Perspective pratique, avec des Remarques sur l'Architecture, par Courtonne. fol. Paris 1725.

—— d'Horlogerie pour les Montres & les Pendules, avec l'Histoire Ancienne & Moderne de l'Horlogerie, trad. de l'Anglois de Mr. Derham, 12. Paris 1731. avec fig.

—— de Physique, par Rohault. 8.

—— de la Peinture, par Leonard de Vinci. 12. Paris avec fig.

—— de la Mécanique, par Mr. de la Hire, 4. Paris 1729.

—— Méthodique & abregé de toutes les Mathematiques, par Mr. de Neufeglise, 2 vol. 8. avec fig. Lion 1700.

—— des Moyens de rendre les Rivieres Navigables &c. Amst. 1696. fig.

V.

Vitruvius Britannicus, ou l'Architecture Britannique, contenant les plans, élevations & sections des Bâtimens reguliers, tant particuliers que publics, de la Grande Bretagne, avec de grandes planches en taille douce. fol. 3 vol.

Usage du Pantometre, 12. Paris avec fig.



